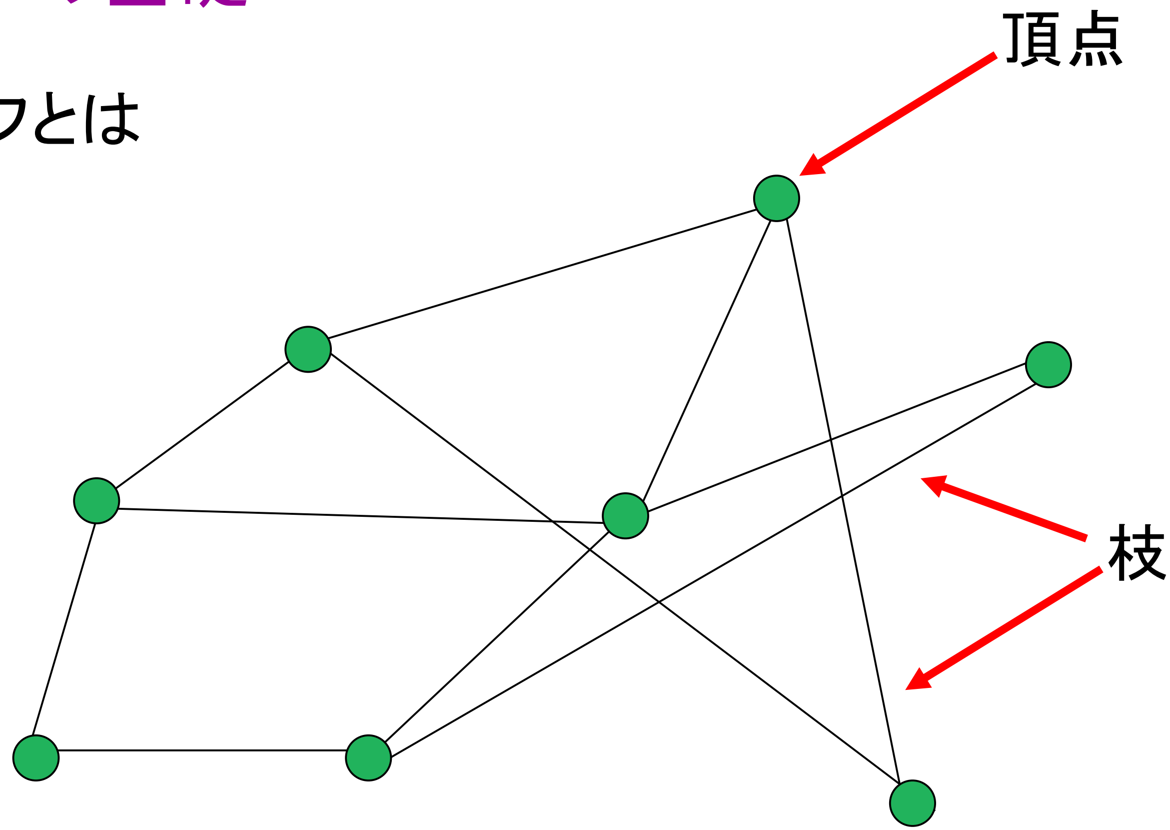
アルゴリズム入門(2)
（グラフの基礎）

宮崎修一
京都大学　学術情報メディアセンター

グラフの基礎

グラフとは

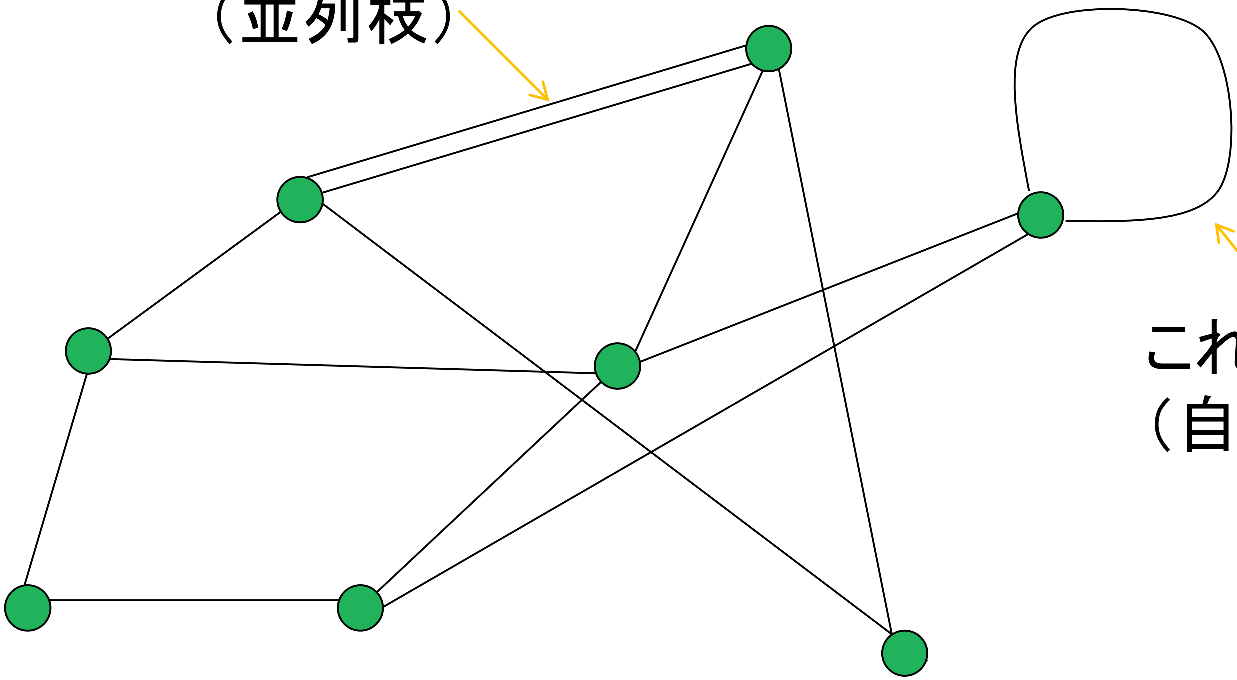


いくつかの頂点があり、
いくつかの頂点ペアが枝でつながれたもの

単純グラフ

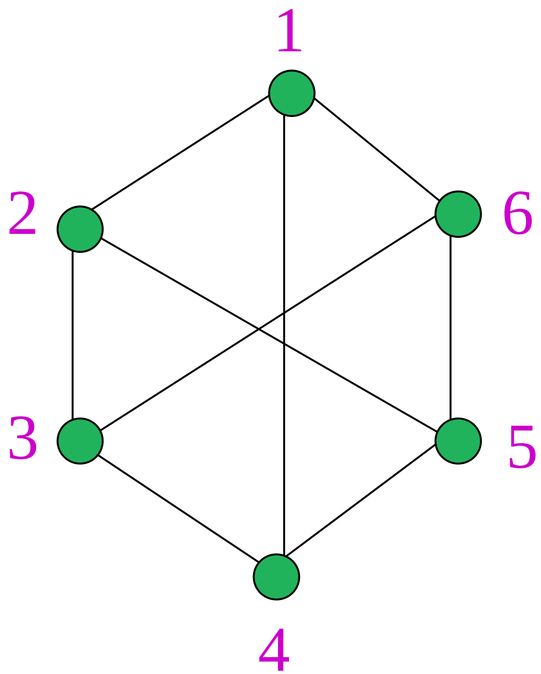
こういうのを許す場合もある

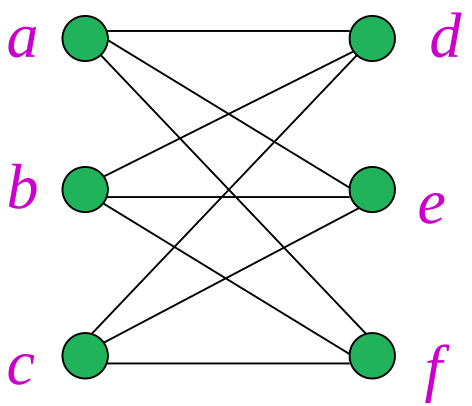
これはだめ
（並列枝）



これもダメ
（自己ループ）

グラフは、接続関係のみが大事。
どう描画されているかは関係ない。





これらは同じグラフ(同型)

問題： 左のグラフと右のグラフで、どの点とどの点が対応するか？

グラフは

・人間関係

・都市の接続関係

・コンピュータネットワーク

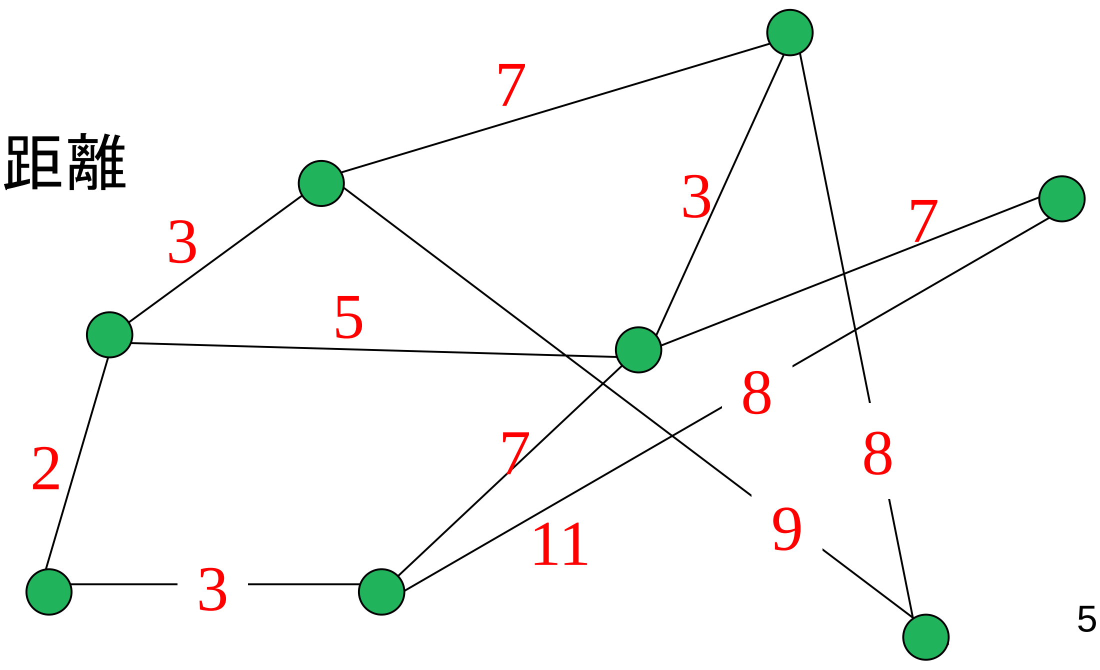
・Webのハイパーリンク関係

など、様々な2項関係を表現できる。

また、接続の度合いを、枝の**重み**によって表すこともある。

例えば

町と町との間の時間・距離

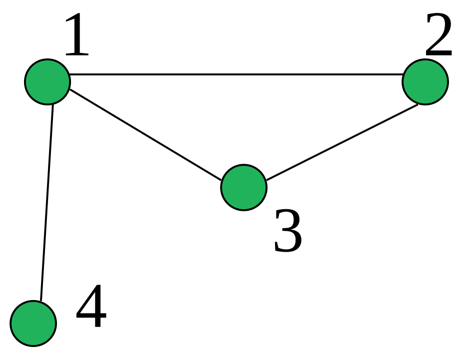


グラフは、$G=(V, E)$で表わされる

V: 頂点集合
E: 枝集合

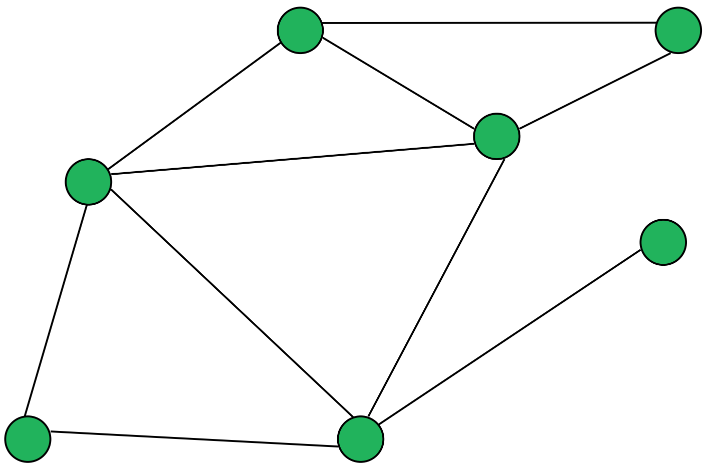
$V=\{1, 2, 3, 4\}$

$E=\{(1,2), (1,3), (1,4), (2,3)\}$

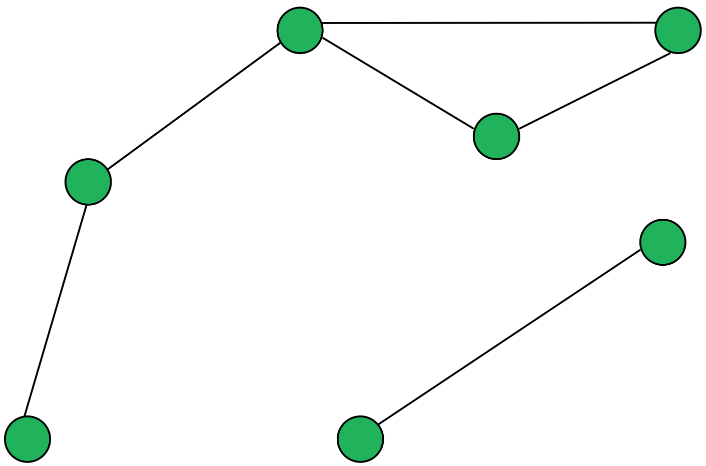


連結グラフ

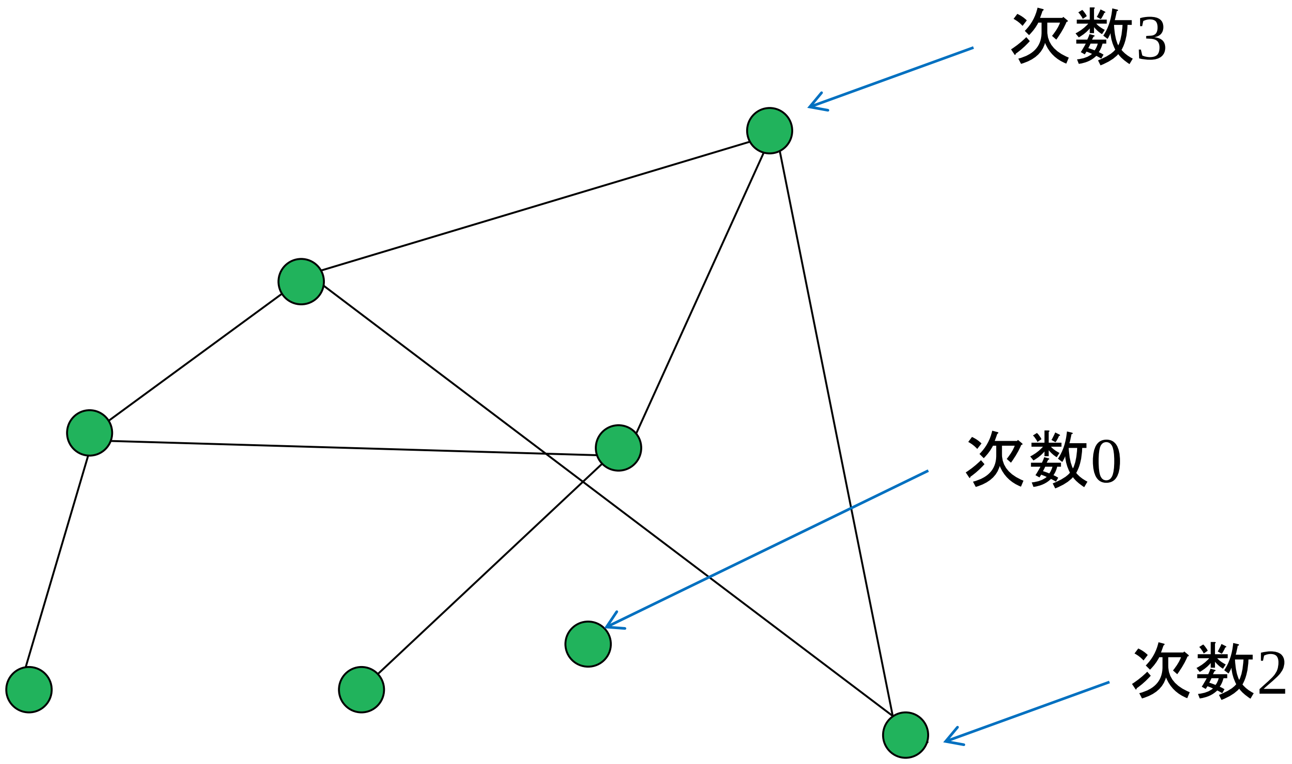
どの頂点からどの頂点へも、
枝を伝って行ける。



非連結グラフ

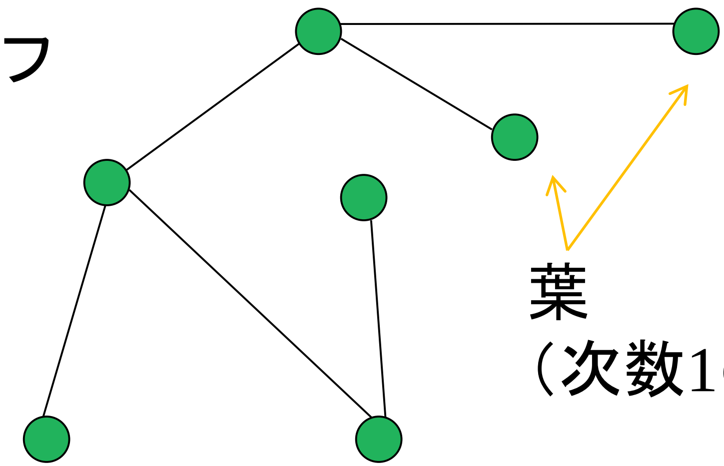


頂点に接続する枝の数＝次数



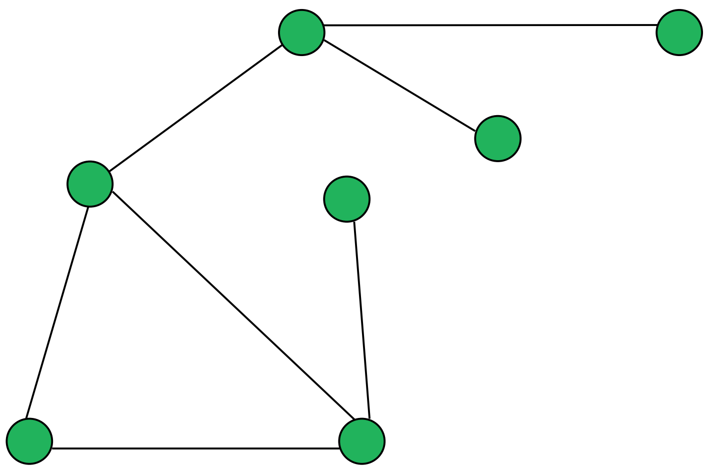
特別なグラフ

木: 閉路を持たない連結グラフ

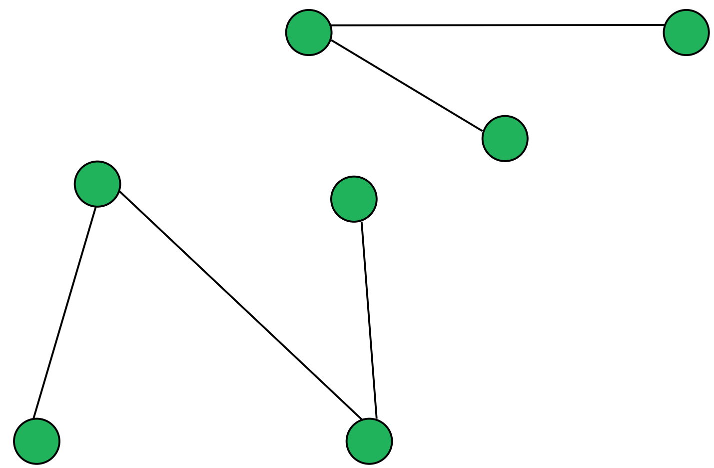


葉
（次数1の頂点）

問題: 頂点数nの木の
枝数はいくつか？



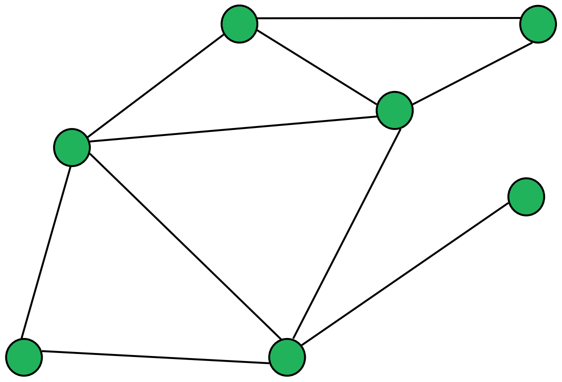
これはだめ
（閉路がある）



これもだめ
（連結でない） 森

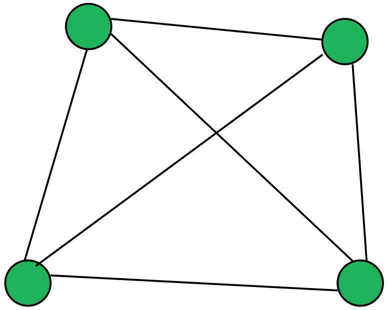
特別なグラフ

平面グラフ:　枝が重ならないように、平面上に描画したグラフ。

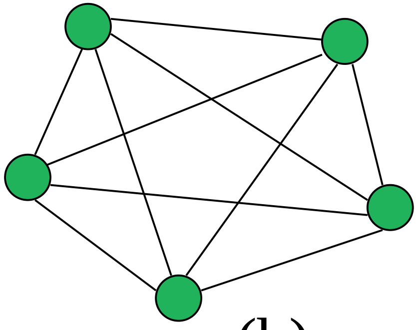


平面的グラフ: 平面グラフとして描画できるグラフ。

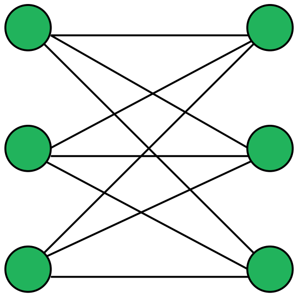
問題: 次のグラフは、平面的グラフか否か？



(a)



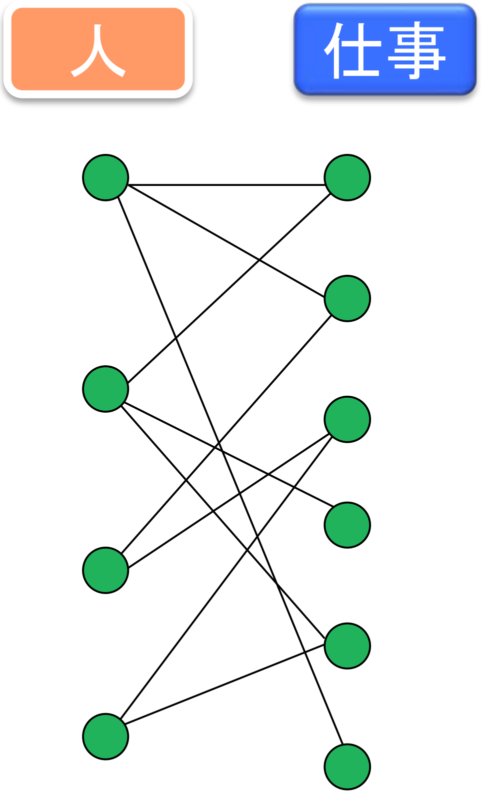
(b)



(c)

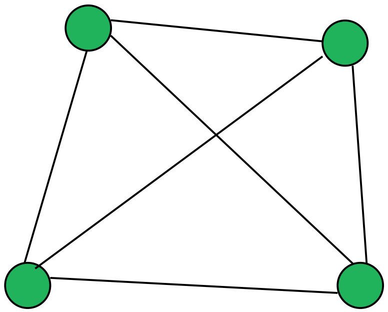
特別なグラフ

二部グラフ:　頂点集合が2つに分けられて、各グループ内では枝が1つもない。

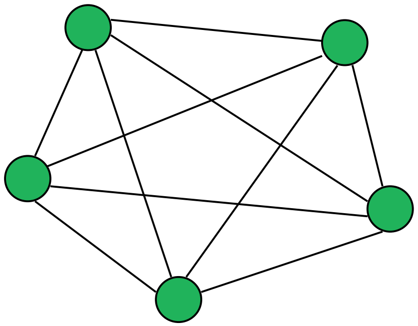


特別なグラフ

完全グラフ:　全ての頂点間に枝が存在するグラフ。



4頂点完全グラフ



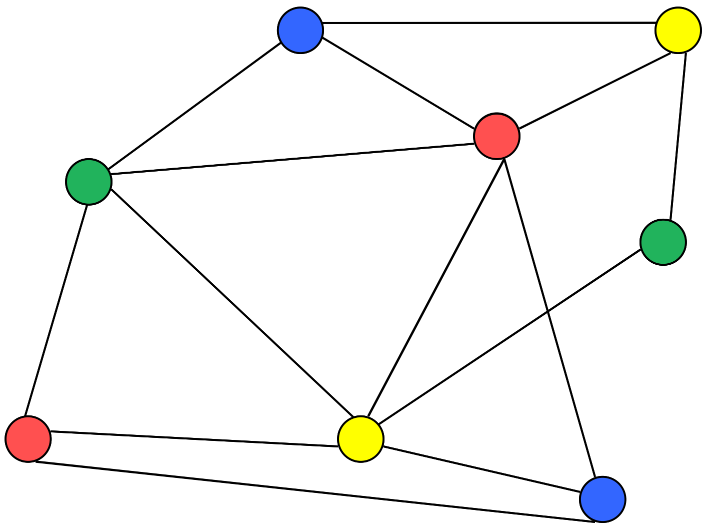
5頂点完全グラフ

問題: n頂点完全グラフには枝がいくつあるか？

グラフの頂点彩色

各頂点を、いずれかの色で塗る。

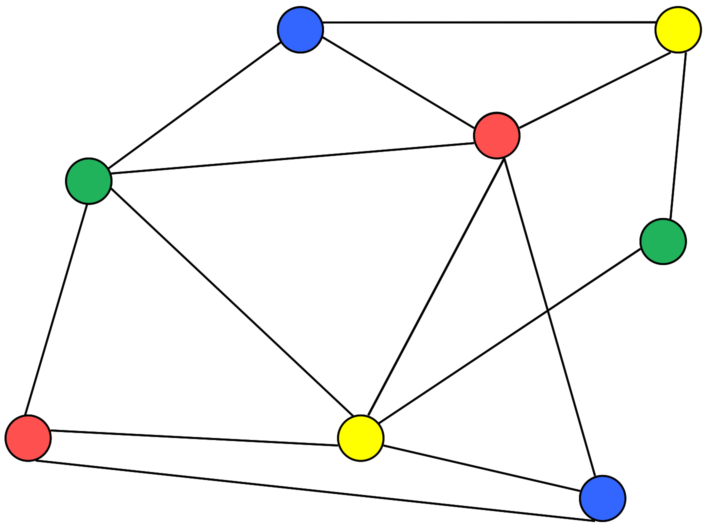
枝でつながれた2頂点は、異なる色で塗る。



全部の頂点を違う色にすれば、自明にできる。
→ どれだけ少ない色でできるか？ というのが問題

問題：このグラフは4色で塗られているが、
もっと少ない色で可能か？

グラフの頂点彩色の応用例



頂点:仕事
同時に出来ない2つの
仕事に枝を張る。

同じ色の仕事は同時に出来る。
色数の最小化 → かかる時間の最小化。

問題:次の事柄を示せ。
与えられたグラフGの次数の最大値:$\Delta(G)$とする。
Gは$\Delta(G)+1$色で彩色できる。

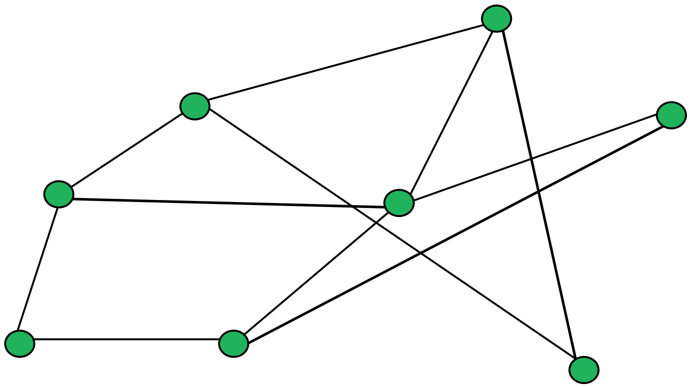
問題:上の定理は最適である(これ以上改良できない)ことを示せ。
すなわち、$\Delta(G)$色では彩色できないGを示せ。

問題:連結で、かつ、全ての次数が同じではない(すなわち、異なる次数の2頂点が存在する)Gは、$\Delta(G)$色で彩色できることを示せ。

※全ての頂点の次数が同じグラフ: 正則グラフ

グラフのマッチング

マッチング:枝の集合。ただし、どの2つの枝も、同じ頂点を共有しない。



問題:このグラフのマッチングを探せ。

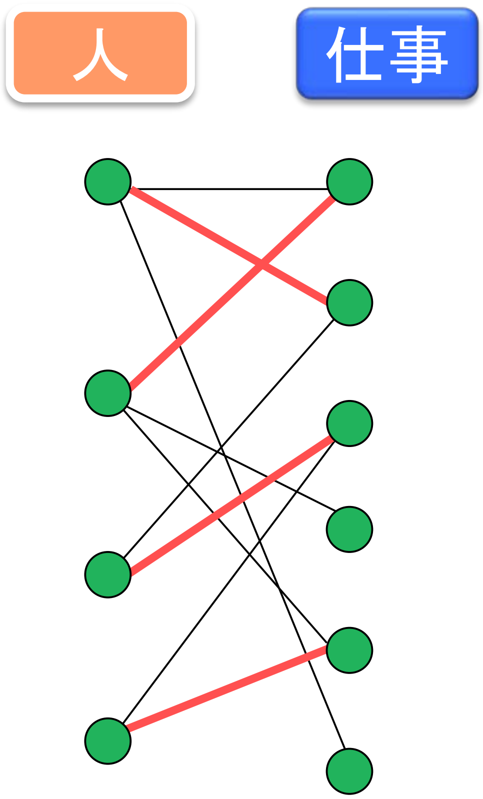
最大マッチングと極大マッチング

極大マッチング：今のマッチングに対して、もうこれ以上枝を付け加えることができない。

最大マッチング：全てのマッチングの中で最大サイズ。（枝数が最大。）

問題：極大マッチングだが最大マッチングでない例を挙げよ。

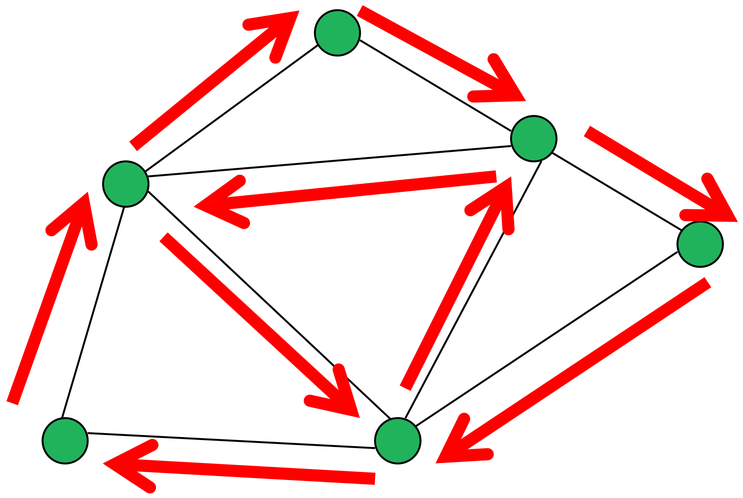
二部グラフの例では、マッチングは人を仕事に重複なく割り当てることに相当する。



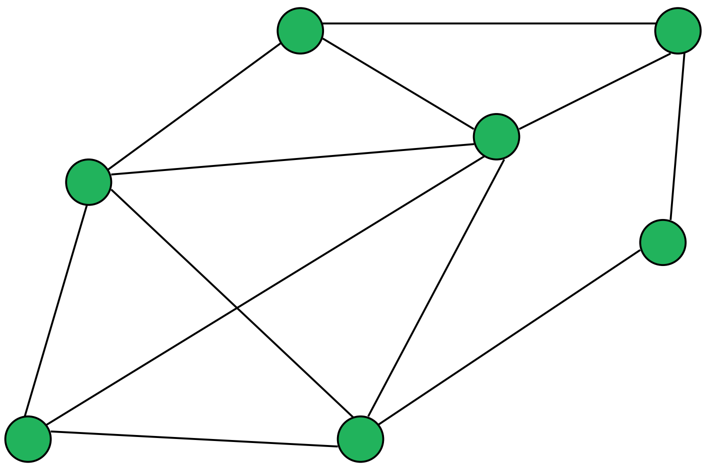
最大マッチングは、できるだけ多くの人に仕事を割り振ることに相当する。

オイラー回路

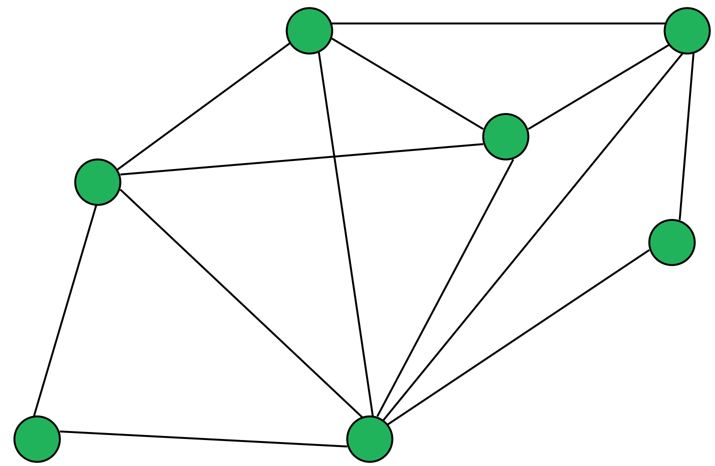
グラフ中の各枝をちょうど1回ずつ通って元の頂点に戻る巡回路



問題：次のグラフはオイラー回路を持つか否か。
持つならそれを示し、持たないなら持たない理由を示せ。



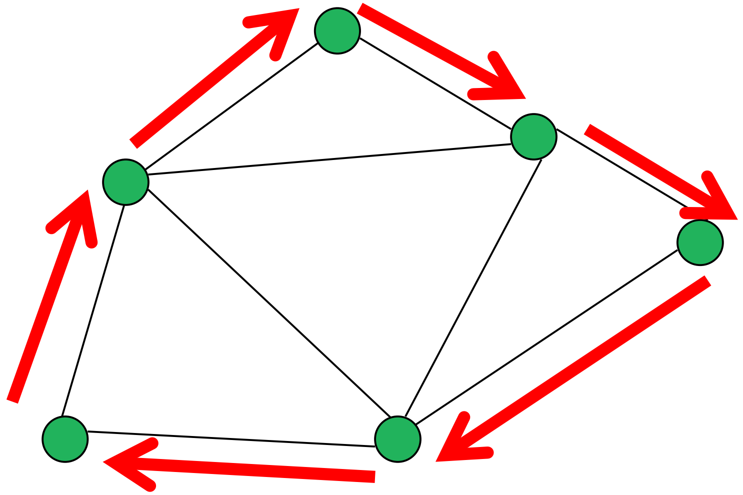
(a)



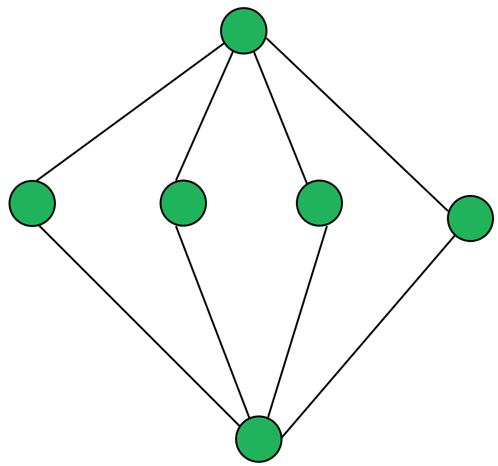
(b)

ハミルトン閉路

グラフ中の各頂点をちょうど1回ずつ通る閉路

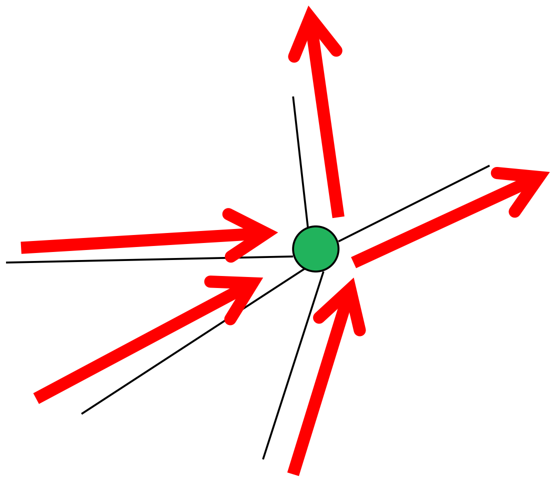


問題：次のグラフはハミルトン閉路を持つか否か。
持つなら閉路を示し、持たないなら持たない理由を示せ。



グラフがオイラー回路を持つ条件

次数が奇数の頂点がある → オイラー回路は持たない。



次数が奇数の頂点がない → オイラー回路を持つ。

次数が奇数の頂点がない ⟷ オイラー回路を持つ。

ハミルトン閉路に関しては、このような単純な必要十分条件が知られていない。

実際、
「グラフがオイラー回路を持つか？」という問題
　→　クラスP（易しい）
「グラフがハミルトン閉路を持つか？」という問題
　→　NP完全（難しい）