

アルゴリズム入門(12) (安定結婚問題)

宮崎修一
京都大学 学術情報メディアセンター

安定結婚問題

入力： 男性、女性、各自の希望リスト

1:	c	e	a	d	b	a:	4	1	3	2	5
2:	a	b	c	d	e	b:	5	1	2	3	4
3:	a	d	c	e	b	c:	2	3	1	5	4
4:	b	e	d	a	c	d:	3	4	2	5	1
5:	d	a	e	b	c	e:	3	1	5	2	4

出力： 男女間のマッチング
(ただし、条件付き。後述。)

例

1:	c	e	a	d	b	a:	4	1	3	2	5
2:	a	b	c	d	e	b:	5	1	2	3	4
3:	a	d	c	e	b	c:	2	3	1	5	4
4:	b	e	d	a	c	d:	3	4	2	5	1
5:	d	a	e	b	c	e:	3	1	5	2	4

これは、なかなか良い。全員が第3位以内とマッチしている。

全員が第2位以内とマッチするマッチングは存在しない。

問題:なぜ？

例

1:	c	e	a	d	b	a:	4	1	3	2	5
2:	a	b	c	d	e	b:	5	1	2	3	4
3:	a	d	c	e	b	c:	2	3	1	5	4
4:	b	e	d	a	c	d:	3	4	2	5	1
5:	d	a	e	b	c	e:	3	1	5	2	4

ところが、このマッチングには欠点がある。

(1, e)は、今の相手よりお互いが好き。今のマッチングに逆らって、「駆け落ち」する可能性がある。

こういうペアを「**ブロッキングペア**」と呼ぶ。

ブロッキングペアのないマッチング：**安定マッチング**

安定結婚問題：安定マッチングを求める問題。

1: c e a d b
2: a b c d e
3: a d c e b
4: b e d a c
5: d a e b c

a: 4 1 3 2 5
b: 5 1 2 3 4
c: 2 3 1 5 4
d: 3 4 2 5 1
e: 3 1 5 2 4

問題: この入力に対する安定マッチングを求めよ。

安定マッチングを求めるには、どうしたらいいか？

単純な方法：

全てのマッチングを求めて、それぞれが安定かどうかをチェックする。

問題：男性 n 人、女性 n 人の場合、マッチングは何通りある？

安定マッチングを求める Gale-Shapley アルゴリズム

→ 1:	c	e	a	d	b	a:	4	1	3	2	5
→ 2:	a	b	c	d	e	b:	5	1	2	3	4
→ 3:	a	d	c	e	b	c:	2	3	1	5	4
→ 4:	b	e	d	a	c	d:	3	4	2	5	1
→ 5:	d	a	e	b	c	e:	3	1	5	2	4

M_1

n^2 ステップで終わる

(安定性の証明の概略)

得られたマッチングが安定でないとする、
ブロッキングペアが存在する。

2: ... ~~x~~ ... () e: ... 2 ... ()

男性2は女性eにプロポーズしたが断られた。
(男性はリストの前から順番にプロポーズするので)

その時点では、女性eは男性2よりも良い人と婚約していた。

e: ... () ~~x~~ ...

それ以後、女性が相手を変える場合は、より良い相手にしか
変えない。

↓
最終的に男性2より下の人とペアになっているのは矛盾。

(証明終わり) 8

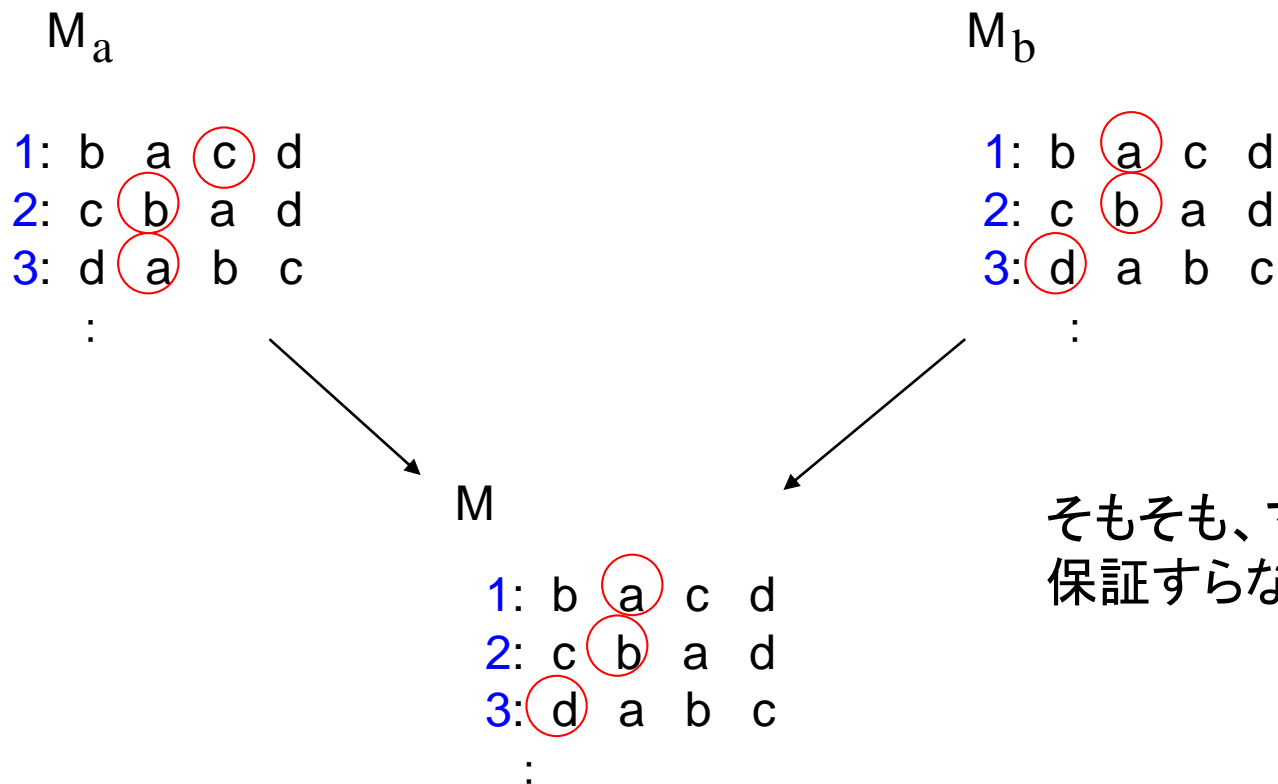
どんな入力にも、最低1つは安定マッチングが存在する。

Gale-Shapleyアルゴリズムは、 $O(n^2)$ 時間で安定マッチングを
求める

安定マッチング同士の関係

定理 [Knuth 1976, Gusfield & Irving 1989]

M_a 、 M_b を I の安定マッチングとする。それぞれの男性が M_a と M_b でのパートナーのうち、好きな方を選択する。その結果もまた安定マッチング。



そもそも、マッチングになる保証すらないことに注意！

実際にやってみる

M_3

1: c e a d b
2: a b c d e
3: a d c e b
4: b e d a c
5: d a e b c

a: 4 1 3 2 5
b: 5 1 2 3 4
c: 2 3 1 5 4
d: 3 4 2 5 1
e: 3 1 5 2 4

M_4

1: c e a d b
2: a b c d e
3: a d c e b
4: b e d a c
5: d a e b c

a: 4 1 3 2 5
b: 5 1 2 3 4
c: 2 3 1 5 4
d: 3 4 2 5 1
e: 3 1 5 2 4

M_3 と M_4 が安定であることを確かめよ

M_2

1: c e a d b
2: a b c d e
3: a d c e b
4: b e d a c
5: d a e b c

a: 4 1 3 2 5
b: 5 1 2 3 4
c: 2 3 1 5 4
d: 3 4 2 5 1
e: 3 1 5 2 4

(証明)

(1) 結果がマッチングにならないこと
ならないとしよう

1: . . . a . . .

3: . . . a . . .

M_1

1: . . . a . . .

3: . . . a . . .

ブロッキングペア

a: . . . 3 . . . 1 . . .

M_2

1: . . . a . . .

3: . . . a . . .

ブロッキングペア

a: . . . 1 . . . 3 . . .

aのリストはどうなっているか？

(2) 得られたマッチングは安定である。

安定でないとしよう → ブロッキングペアがいる

1: . . . a . . . **c** . . .

a: . . . 1 . . . **5** . . .

M_1

1: . . . a . . . **c** . . .

a: . . . 1 . . . **5** . . .

M_2

1: . . . a . . . c . . . **.**

a: . . . 1 . . . **5** . . .

1 は M_1 で **c** とマッチしている。 M_2 では **c** 以下の人とマッチ。

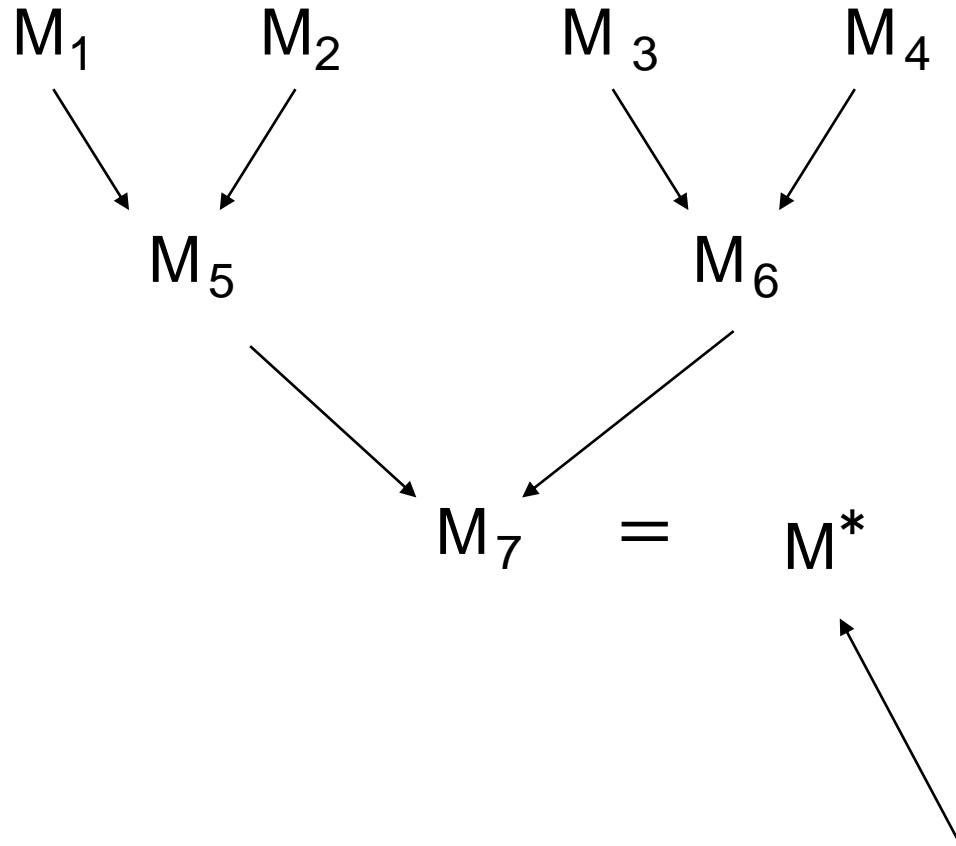
a は M_1 と M_2 の少なくともどちらかで **5** とマッチしている。

M_1 か M_2 のどちらかは、ブロッキングペアを持つ。

どちらも安定であることに矛盾。

(証明終わり)

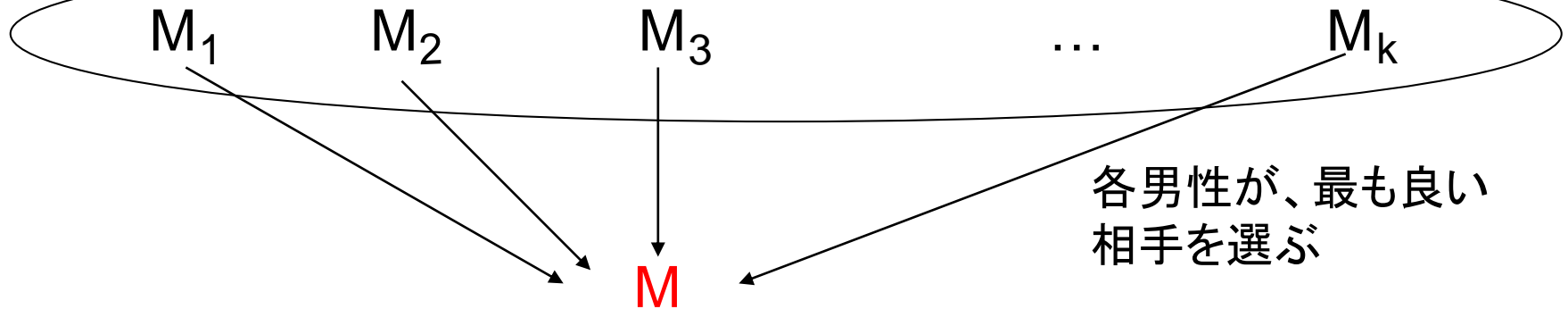
3つ以上にも拡張可能



各男性が、 $M_1 \sim M_4$ のうち最も良い相手を選んだもの

系

Iの安定マッチング全体



M は I の安定マッチング。つまり、 M は $M_1 \sim M_k$ のどれか。

↓
どの男性にとっても、全ての安定マッチングの中で最も良いものが存在する。(男性最適安定マッチング)

Theorem [Gale & Shapley 1962]

Gale-Shapley アルゴリズムの出力は男性最適安定マッチング。

※もちろん、男女を入れ替えてアルゴリズムを走らせれば、
女性最適安定マッチングが求まる。

さらに。。。

男性最適安定マッチング = 女性最悪安定マッチング

女性最適安定マッチング = 男性最悪安定マッチング

一般に、男性の満足度と女性の満足度はトレードオフの関係にある。

M_1 (男性最適)

1: c e a d b	a: 4 1 3 2 5
2: a b c d e	b: 5 1 2 3 4
3: a d c e b	c: 2 3 1 5 4
4: b e d a c	d: 3 4 2 5 1
5: d a e b c	e: 3 1 5 2 4

M_3

1: c e a d b	a: 4 1 3 2 5
2: a b c d e	b: 5 1 2 3 4
3: a d c e b	c: 2 3 1 5 4
4: b e d a c	d: 3 4 2 5 1
5: d a e b c	e: 3 1 5 2 4

M_5 (女性最適)

1: c e a d b	a: 4 1 3 2 5
2: a b c d e	b: 5 1 2 3 4
3: a d c e b	c: 2 3 1 5 4
4: b e d a c	d: 3 4 2 5 1
5: d a e b c	e: 3 1 5 2 4

M_2

1: c e a d b	a: 4 1 3 2 5
2: a b c d e	b: 5 1 2 3 4
3: a d c e b	c: 2 3 1 5 4
4: b e d a c	d: 3 4 2 5 1
5: d a e b c	e: 3 1 5 2 4

M_4

1: c e a d b	a: 4 1 3 2 5
2: a b c d e	b: 5 1 2 3 4
3: a d c e b	c: 2 3 1 5 4
4: b e d a c	d: 3 4 2 5 1
5: d a e b c	e: 3 1 5 2 4

実は、逆も成り立つ。

→各男性、2つのマッチングで、嫌いな方の女性を選ぶ。

M₃

1: c **e** a d b
2: a b **c** d e
3: **a** d c e b
4: b e **d** a c
5: d a e **b** c

a: 4 1 **3** 2 5
b: **5** 1 2 3 4
c: **2** 3 1 5 4
d: 3 **4** 2 5 1
e: 3 **1** 5 2 4

M₄

1: **c** e a d b
2: a **b** c d e
3: a **d** c e b
4: b e d **a** c
5: d a **e** b c

a: **4** 1 3 2 5
b: 5 1 **2** 3 4
c: 2 3 **1** 5 4
d: **3** 4 2 5 1
e: 3 1 **5** 2 4

M₅

1: c **e** a d b
2: a b **c** d e
3: a **d** c e b
4: b e d **a** c
5: d a e **b** c

a: **4** 1 3 2 5
b: **5** 1 2 3 4
c: **2** 3 1 5 4
d: **3** 4 2 5 1
e: 3 **1** 5 2 4

入力に「同順位(タイ)」を許したらどうなるだろうか？

1: a (c b (d)) e

a: (2) 1 3 4 5

2: c (a) e b d

b: (2 1) 4 (5) 3

3: b a ((e) d) c

c: 1 2 3 5 (4)

4: (c) b d (e a)

d: (3 (1) 4) (2 5)

5: c (d (b)) e a

e: 4 (3) 1 2 5

→ (5,c) はブロッキングペア

→ (1,c) はブロッキングペアではない

弱安定 両者とも得をする

片方は得をし、もう一方は損をしない

強安定: (1,c) もブロッキングペアと定義する

超安定: (3,d) もブロッキングペアと定義する

両者とも損をしない

定理 [Gusfield & Irving 1989]

どんな入力にも、弱安定マッチングは必ず存在する。

(証明)

1:	a	(c	b	d)	e	a:	2	1	3	4	5
2:	c	a	e	b	d	b:	(2	1)	4	5	3
3:	b	a	(e	d)	c	c:	1	2	3	5	4
4:	c	b	d	(e	a)	d:	(3	1	4)	(2	5)
5:	c	(d	b)	e	a	e:	4	3	1	2	5

タイあり



1:	a	b	c	d	e	a:	2	1	3	4	5
2:	c	a	e	b	d	b:	1	2	4	5	3
3:	b	a	e	d	c	c:	1	2	3	5	4
4:	c	b	d	a	e	d:	3	1	4	2	5
5:	c	d	b	e	a	e:	4	3	1	2	5

タイなし

超安定 ならば 強安定
強安定 ならば 弱安定

問題: 弱安定マッチングは持つが、強安定マッチングを持たない入力はあるか？

問題: 強安定マッチングは持つが、超安定マッチングを持たない入力はあるか？