確率伝播とスペクトラル手法
— 平均時解析のための方法 —

山本 真基

京都大学 情報学研究科

２００７年１２月１５日

with　渡辺治（東京工業大学）

目次

1. 平均時解析（Average-Case Analysis）とは？
2. スペクトラル手法（Spectral Methods）
3. 確率伝播（Belief Propagation）
4. 我々のアルゴリズムとその解析
5. まとめ

目次

M. Yamamoto and O. Watanabe, “Belief Propagation and Spectral Methods”, Research Reports (Series C: Computer Science) C-248, Dept. of Math. and Comp. Sciences, Tokyo Institute of Technology, November, 2007.

平均時解析（Average-Case Analysis）とは？

平均時解析（Average-Case Analysis）とは？

問題の 平均的な 難しさを解析する：

平均時解析（Average-Case Analysis）とは？

問題の 平均的な 難しさを解析する：

- **上界の解析**
- **下界の解析**

平均時解析（Average-Case Analysis）とは？

問題の **平均的な** 難しさを解析する：

- 上界の解析 $\longleftarrow$ 問題が最悪の場合で計算困難（e.g., $\mathcal{NP}$-困難）であっても，ほとんどの例題は簡単なのでは？
- 下界の解析 $\longleftarrow$ 計算論的暗号理論などでは，問題の平均的な難しさを仮定する（e.g., 一方向性関数の存在）．

平均時解析（Average-Case Analysis）とは？

問題の **平均的な** 難しさを解析する：

- **上界の解析** $\longleftarrow$ 問題が最悪の場合で計算困難（e.g., $\mathcal{NP}$-困難）であっても，ほとんどの例題は簡単なのでは？
- 下界の解析 $\longleftarrow$ 計算論的暗号理論などでは，問題の平均的な難しさを仮定する（e.g., 一方向性関数の存在）.

平均時解析（上界）：シナリオ

1. Suppose　:　**問題** L **とその例題の族** $\mathcal{I} = \{\mathcal{I}_n\}_{n \geq 1}$

平均時解析（上界）：シナリオ

1. Suppose : **問題** L **とその例題の族** $\mathcal{I} = \{\mathcal{I}_n\}_{n\geq 1}$

2. Define : $\left\{ \begin{array}{ll} \text{i.} & \mathcal{I}_n \text{ 上の分布 } \mathcal{G}_n = \mathcal{G}_{n,p,q,\ldots} \\ \text{ii.} & L \text{ を解くアルゴリズム } A \end{array} \right.$

平均時解析（上界）：シナリオ

1. Suppose : **問題** L **とその例題の族** $\mathcal{I} = \{\mathcal{I}_n\}_{n\geq 1}$

2. Define : $\left\{ \begin{array}{ll} \text{i.} & \mathcal{I}_n \text{ 上の分布 } \mathcal{G}_n = \mathcal{G}_{n,p,q,\ldots} \\ \text{ii.} & L \text{ を解くアルゴリズム } A \end{array} \right.$

3. Analyze : $\displaystyle\sum_{J\in\mathcal{I}_n} \Pr_{I\in\mathcal{G}_n}\{I = J\} \cdot \mathrm{time}_A(J)$

3'. : $\displaystyle\Pr_{I\in\mathcal{G}_n}\{A(I) = \mathrm{OPT}(I)\}$
ただし， A **は多項式時間アルゴリズム**

平均時解析（上界）：シナリオ

1. Suppose : **問題** L **とその例題の族** $\mathcal{I} = \{\mathcal{I}_n\}_{n \geq 1}$

2. Define : $\left\{ \begin{array}{ll} \text{i.} & \mathcal{I}_n \text{ 上の分布 } \mathcal{G}_n = \mathcal{G}_{n,p,q,\ldots} \\ \text{ii.} & L \text{ を解くアルゴリズム } A \end{array} \right.$

3. Analyze : $\displaystyle\sum_{J \in \mathcal{I}_n} \Pr_{I \in \mathcal{G}_n} \{I = J\} \cdot \mathrm{time}_A(J)$

3'. : $\displaystyle\Pr_{I \in \mathcal{G}_n} \{A(I) = \mathrm{OPT}(I)\}$

ただし， A **は多項式時間アルゴリズム**

このシナリオの 目標 は？

平均時解析（上界）：シナリオ

1. Suppose : **問題** L **とその例題の族** $\mathcal{I} = \{\mathcal{I}_n\}_{n\geq 1}$

2. Define : $\left\{\begin{array}{ll} \text{i.} & \mathcal{I}_n \text{ 上の分布 } \mathcal{G}_n = \mathcal{G}_{n,p,q,\ldots} \\ \text{ii.} & L \text{ を解くアルゴリズム } A \end{array}\right.$

3. Analyze : $\displaystyle\sum_{J\in\mathcal{I}_n} \Pr_{I\in\mathcal{G}_n}\{I = J\} \cdot \mathrm{time}_A(J) = \mathbf{poly}(n)$

3'. : $\displaystyle\Pr_{I\in\mathcal{G}_n}\{A(I) = \mathrm{OPT}(I)\} = 1 - o_n(1)$

ただし， A **は多項式時間アルゴリズム**

このシナリオの 目標 は？

平均時解析（上界）：例

例

1. L : Min-Bisection **問題**, $\mathcal{I}_n$: n **頂点の全無向グラフの集合**
2. $\begin{cases} \mathcal{G}_n & : & n \text{ 頂点の全無向グラフ上の一様分布} \\ A & : & \text{（} L \text{ のための）多項式時間アルゴリズム} \end{cases}$

平均時解析（上界）：例

例

1. L : Min-Bisection **問題**, $\mathcal{I}_n$: n **頂点の全無向グラフの集合**
2. $\left\{ \begin{array}{lll} \mathcal{G}_n & : & n \text{ 頂点の全無向グラフ上の一様分布} \\ A & : & \text{（} L \text{ のための）多項式時間アルゴリズム} \end{array} \right.$

定義 (Min-Bisection（最小２等分割）問題)

例題：無向グラフ $G = (V, E)$
質問：カットの辺の数が最小となる V **の２等分割** (V_L, V_R) **は？**

平均時解析（上界）：例

例

1. L : Min-Bisection 問題, $\mathcal{I}_n$: n 頂点の全無向グラフの集合
2. $\begin{cases} \mathcal{G}_n & : \\ A & : \end{cases}$ n 頂点の全無向グラフ上の一様分布
（L のための）多項式時間アルゴリズム

定義 (Min-Bisection（最小２等分割）問題)

例題：無向グラフ $G = (V, E)$
質問：カット辺の数が最小となる V の２等分割 (V_L, V_R) は？

事実

Min-Bisection 問題は $\mathcal{NP}$-困難 である．

平均時解析（上界）：例

例

1. L : Min-Bisection, $\mathcal{I}_n$: n 頂点の全無向グラフの集合

2. $\begin{cases} \mathcal{G}_n & : \quad n \text{ 頂点の全無向グラフ上の一様分布} \\ A & : \quad \text{（}L\text{ のための）多項式時間アルゴリズム} \end{cases}$

3. $$\sum_{J \in \mathcal{I}_n} \Pr_{I \in \mathcal{G}_n} \{I = J\} \cdot \mathrm{time}_A(J) = \mathbf{poly}(n)$$

3′. $$\Pr_{I \in \mathcal{G}_n} \{A(I) = \mathrm{OPT}(I)\} = 1 - o_n(1)$$
ただし，A は多項式時間アルゴリズム

平均時解析（上界）：例

例

1. L : Min-Bisection, $\mathcal{I}_n$: n 頂点の全無向グラフの集合

2. $\begin{cases} \mathcal{G}_n & : \quad n \text{ 頂点の全無向グラフ上の一様分布} \\ A & : \quad \text{（}L\text{ のための）多項式時間アルゴリズム} \end{cases}$

3. $\displaystyle\sum_{J \in \mathcal{I}_n} \Pr_{I \in \mathcal{G}_n} \{I = J\} \cdot \mathrm{time}_A(J) = \mathbf{poly}(n)$

3′. $\displaystyle\Pr_{I \in \mathcal{G}_n} \{A(I) = \mathrm{OPT}(I)\} = 1 - o_n(1)$

ただし，A は多項式時間アルゴリズム

例題の分布 for Min-Bisection

定義 ($\mathcal{G}_{2n,p,r}$: for Min-Bisection)

$\mathcal{G}_{2n,p,r}$: 以下の PTM（パラメータ：p, r）により定義される分布：

例題の分布 for Min-Bisection

定義 ($\mathcal{G}_{2n,p,r}$: for Min-Bisection)

$\mathcal{G}_{2n,p,r}$: **以下の** PTM **（パラメータ：**p, r**）により定義される分布：**

入力 : $2n$: **頂点の個数**, $V \stackrel{\text{def}}{=} \{1, \ldots, n\} \cup \{-1, \ldots, -n\}$

出力 : $G = (V, E)$

例題の分布 for Min-Bisection

定義 ($\mathcal{G}_{2n,p,r}$: for Min-Bisection)

$\mathcal{G}_{2n,p,r}$: **以下の** PTM **（パラメータ：**p, r**）により定義される分布：**

入力 : $2n$: **頂点の個数**, $V \stackrel{\text{def}}{=} \{1, \ldots, n\} \cup \{-1, \ldots, -n\}$
出力 : $G = (V, E)$

1. $\phi \stackrel{\text{def}}{=} (V_L, V_R)$**：**$V$ **の（ランダムな）２等分割**

$$\left.\begin{array}{lcl} V_L & = & \{1, \ldots, n\} \\ V_R & = & \{-1, \ldots, -n\} \end{array}\right\} \longrightarrow \left\{\begin{array}{lcll} \phi(i) & = & 1 & i \in V_L \\ \phi(i) & = & -1 & i \in V_R \end{array}\right.$$

例題の分布 for Min-Bisection

定義 ($\mathcal{G}_{2n,p,r}$: for Min-Bisection)

$\mathcal{G}_{2n,p,r}$: **以下の** PTM **（パラメータ：**p, r**）により定義される分布：**

入力 : $2n$: **頂点の個数**, $V \stackrel{\text{def}}{=} \{1, \ldots, n\} \cup \{-1, \ldots, -n\}$
出力 : $G = (V, E)$

1. $\phi \stackrel{\text{def}}{=} (V_L, V_R)$**：**$V$ **の（ランダムな）２等分割**

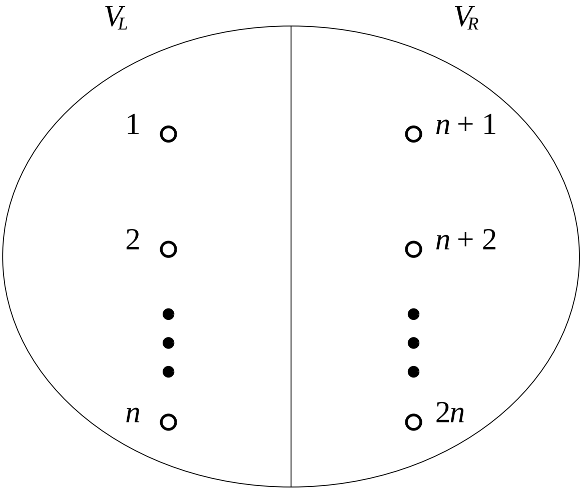
$$\left.\begin{array}{lcl} V_L & = & \{1, \ldots, n\} \\ V_R & = & \{-1, \ldots, -n\} \end{array}\right\} \longrightarrow \left\{\begin{array}{lcll} \phi(i) & = & 1 & i \in V_L \\ \phi(i) & = & -1 & i \in V_R \end{array}\right.$$

2. **以下の規則で辺集合** E **を生成する：**

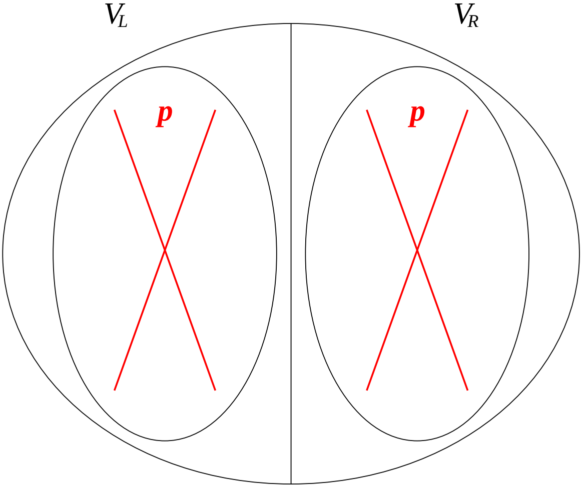
内部辺 : $\forall i \in \{L, R\}, \forall v, v' \in V_i \quad \left[\Pr\{(v, v') \in E\} = p\right]$

外部辺 : $\forall v \in V_L, \forall v' \in V_R \quad \left[\Pr\{(v, v') \in E\} = r\right]$

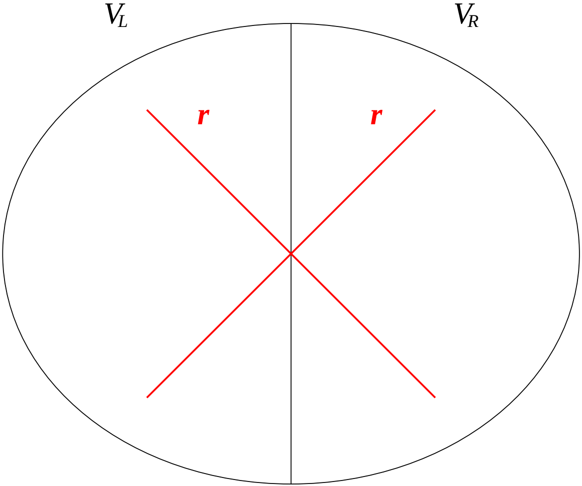
$\mathcal{G}_{2n,p,r}$ for Min-Bisection



$\mathcal{G}_{2n,p,r}$ for Min-Bisection



$\mathcal{G}_{2n,p,r}$ for Min-Bisection



例題の分布 for Min-Bisection

定義 ($\mathcal{G}_{2n,p,r}$: for Min-Bisection)

$\mathcal{G}_{2n,p,r}$: 以下の PTM（パラメータ：p, r）により定義される分布：

入力 : $2n$: 頂点の個数, $V \stackrel{\text{def}}{=} \{1, \ldots, n\} \cup \{-1, \ldots, -n\}$
出力 : $G = (V, E)$

1. $\phi \stackrel{\text{def}}{=} (V_L, V_R)$：$V$ の（ランダムな）２等分割
2. 以下の規則で辺集合 E を生成する：

$$\begin{array}{llll}\textbf{内部辺} & : & \forall i \in \{L, R\}, \forall v, v' \in V_i & \left[\Pr\{(v, v') \in E\} = p \right] \\ \textbf{外部辺} & : & \forall v \in V_L, \forall v' \in V_R & \left[\Pr\{(v, v') \in E\} = r \right]\end{array}$$

例題の分布 for Min-Bisection

定義 ($\mathcal{G}_{2n,p,r}$: for Min-Bisection)

$\mathcal{G}_{2n,p,r}$: **以下の** PTM **（パラメータ：**p, r**）により定義される分布：**

入力 : $2n$: **頂点の個数**, $V \stackrel{\text{def}}{=} \{1, \dots, n\} \cup \{-1, \dots, -n\}$
出力 : $G = (V, E)$

1. $\phi \stackrel{\text{def}}{=} (V_L, V_R)$**：**$V$ **の（ランダムな）２等分割**
2. **以下の規則で辺集合** E **を生成する：**

$$\begin{array}{lll} \textbf{内部辺} : & \forall i \in \{L, R\}, \forall v, v' \in V_i & \left[\Pr\{(v, v') \in E\} = p\right] \\ \textbf{外部辺} : & \forall v \in V_L, \forall v' \in V_R & \left[\Pr\{(v, v') \in E\} = r\right] \end{array}$$

$\mathcal{G}_{2n,p,r}$: Planted Solution Model

$\mathcal{G}_{2n,p,r}$ の性質 for Min-Bisection

命題

ある定数 $c \gg 1$ **に対して** $p \geq c \log n/n$ **かつ** $p/r \geq c$ **であるならば，**

$$\Pr_{G \in \mathcal{G}_{2n,p,r}} \{\phi = \mathrm{OPT}(G)\} = 1 - o_n(1)$$

覚え書き

$$\begin{array}{lll} \textbf{内部辺} & : \ \forall i \in \{L, R\}, \forall v, v' \in V_i & \left[\Pr\{(v, v') \in E\} = p\right] \\ \textbf{外部辺} & : \ \forall v \in V_L, \forall v' \in V_R & \left[\Pr\{(v, v') \in E\} = r\right] \end{array}$$

歴史：平均時解析 in the Planted Solution Model

頂点 3-彩色問題：N. Alon and N. Kahale, “A spectral technique for coloring random 3-colorable graphs”, SIAM J. Comp. 26, 1997.

最大クリーク問題：N. Alon, M. Krivelevich, and B. Sudakov “Finding a Large Hidden Clique in a Random Graph”, SODA98, 1998.

3-SAT **問題**：A. Flaxman, “A spectral technique for random satisfiable 3CNF formulas”, SODA03, 2003.

Min-Bisection **問題**：A. Coja-Oghlan “A Spectral Heuristic for Bisecting Random Graphs”, SODA05, 2005.

MAX2SAT **問題**：Masaki Yamamoto, “A Spectral Method for MAX2SAT in the Planted Solution Model”, ISAAC07, 2007.

スペクトラル手法（Spectral Methods）

スペクトラル手法：Spect by Coja-Oghlan [SODA05]

$\mathtt{Spect}(G = (V, E), p, r)$ // $\widehat{A}$：G **の隣接（対称）行列**

$\{$

スペクトラル手法：Spect by Coja-Oghlan [SODA05]

$\texttt{Spect}(G = (V, E), p, r)$ // $\widehat{A}$：G の隣接（対称）行列
{
    Let $\widehat{U} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \widehat{A} - ((p + r)/2)J$;

スペクトラル手法：Spect by Coja-Oghlan [SODA05]

$\mathtt{Spect}(G=(V,E),p,r)$ // $\widehat{A}$：G **の隣接（対称）行列**

{

Let $\widehat{U} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \widehat{A}-((p+r)/2)J$;

Calculate the largest eigenvector $\widehat{\mathbf{e}}_1$ of $\widehat{U}$;

スペクトラル手法：Spect by Coja-Oghlan [SODA05]

$\texttt{Spect}(G = (V, E), p, r)$ // $\widehat{A}$：G **の隣接（対称）行列**

{

Let $\widehat{U} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \widehat{A} - ((p+r)/2)J$;

Calculate the largest eigenvector $\widehat{\mathbf{e}}_1$ of $\widehat{U}$;

Let $\begin{cases} b_i = +1 & \widehat{\mathbf{e}}_1(i) > 0 \\ b_i = -1 & \text{o.w.} \end{cases}$

スペクトラル手法：Spect by Coja-Oghlan [SODA05]

$\texttt{Spect}(G=(V,E),p,r)$ // $\widehat{A}$：G **の隣接（対称）行列**

{

Let $\widehat{U} \stackrel{\text{def}}{=} \widehat{A} - ((p+r)/2)J$;

Calculate the largest eigenvector $\widehat{\mathbf{e}}_1$ of $\widehat{U}$;

Let $\begin{cases} b_i = +1 & \widehat{\mathbf{e}}_1(i) > 0 \\ b_i = -1 & \text{o.w.} \end{cases}$

repeat UPDATES times do {

スペクトラル手法：Spect by Coja-Oghlan [SODA05]

Spect$(G=(V,E),p,r)$ // $\widehat{A}$：G の隣接（対称）行列

{

Let $\widehat{U} \stackrel{\text{def}}{=} \widehat{A} - ((p+r)/2)J$;

Calculate the largest eigenvector $\widehat{\mathbf{e}}_1$ of $\widehat{U}$;

Let $\begin{cases} b_i = +1 & \widehat{\mathbf{e}}_1(i) > 0 \\ b_i = -1 & \text{o.w.} \end{cases}$

repeat UPDATES times do {

for each $i \in V$ do (in parallel)

$$\begin{array}{ll} b_i = +1 & \#\mathrm{Pos}(i) > \#\mathrm{Neg}(i) \\ b_i = -1 & \text{o.w.} \end{array}$$

}

output $(b_1, \ldots, b_{2n})$;

}

Spect に関する定理

Spect に関する定理

定理 (Coja-Oghlan; SODA05)

$$p - r = \Omega\left(\frac{\log n}{n}\right), \quad \mathrm{UPDATES} \geq \log n$$

$$\longrightarrow$$

Spect に関する定理

定理 (Coja-Oghlan; SODA05)

$$p - r = \Omega\left(\frac{\log n}{n}\right), \quad \mathrm{UPDATES} \geq \log n$$

$$\longrightarrow \quad \Pr_{G \in \mathcal{G}_{2n,p,r}} \{\mathtt{Spect}(G, p, r) = \phi\} = 1 - o(1)$$

Spect に関する定理

定理 (Coja-Oghlan; SODA05)

$$p - r = \Omega\left(\frac{\log n}{n}\right), \quad \mathrm{UPDATES} \geq \log n$$

$$\longrightarrow \quad \Pr_{G \in \mathcal{G}_{2n,p,r}} \{\mathtt{Spect}(G, p, r) = \phi\} = 1 - o(1)$$

注

Coja-Oghlan [SODA05] **は，** $p - r = \Omega(1/n)$ **(**i.e., $\mathrm{E}[|E|] = \Omega(n)$**)** **に対する同様の結果も与えている．**

スペクトラル手法：Spect by Coja-Oghlan [SODA05]

Spect$(G=(V,E),p,r)$ // $\widehat{A}$：G の隣接（対称）行列

{

Let $\widehat{U} \stackrel{\text{def}}{=} \widehat{A} - ((p+r)/2)J$;

Calculate the largest eigenvector $\widehat{\mathbf{e}_1}$ of $\widehat{U}$;

Let $\begin{cases} b_i = +1 & \widehat{\mathbf{e}_1}(i) > 0 \\ b_i = -1 & \text{o.w.} \end{cases}$

repeat UPDATES times do {

for each $i \in V$ do (in parallel)

$$\begin{array}{ll} b_i = +1 & \#\mathrm{Pos}(i) > \#\mathrm{Neg}(i) \\ b_i = -1 & \text{o.w.} \end{array}$$

}

output $(b_1, \ldots, b_{2n})$;

}

スペクトラル手法：Spect by Coja-Oghlan [SODA05]

$\mathtt{Spect}(G=(V,E),p,r)$ // $\widehat{A}$：G の隣接（対称）行列

{

Let $\widehat{U} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \widehat{A} - ((p+r)/2)J$;

Calculate the largest eigenvector $\widehat{\mathbf{e}}_1$ of $\widehat{U}$;

Let $\begin{cases} b_i = +1 & \widehat{\mathbf{e}}_1(i) > 0 \\ b_i = -1 & \text{o.w.} \end{cases}$

repeat UPDATES times do {

for each $i \in V$ do (in parallel)

$\begin{cases} b_i = +1 & \#\mathrm{Pos}(i) > \#\mathrm{Neg}(i) \\ b_i = -1 & \text{o.w.} \end{cases}$

}

output $(b_1, \ldots, b_{2n})$;

}

$\widehat{\mathbf{e}}_1$ と ϕ について

$$\widehat{U} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \widehat{A} - \frac{p+r}{2} J$$

$$U \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{E}[\widehat{U}]$$

$\widehat{\mathbf{e}}_1$: $\widehat{U}$ の最大固有ベクトル

$\mathbf{e}_1$: U の最大固有ベクトル

$\widehat{\mathbf{e}}_1$ と ϕ について

$$
\begin{aligned}
\widehat{U} &\overset{\text{def}}{=} \widehat{A} - \frac{p+r}{2} J \\
U &\overset{\text{def}}{=} \mathrm{E}[\widehat{U}] \\
\widehat{\mathbf{e}}_1 &: \widehat{U} \text{ の最大固有ベクトル} \\
\mathbf{e}_1 &: U \text{ の最大固有ベクトル}
\end{aligned}
$$

事実

$$
\mathbf{e}_1 = (\underbrace{1, \ldots, 1}_{n\text{ 個}}, \underbrace{-1, \ldots, -1}_{n\text{ 個}})
$$

$\widehat{\mathbf{e}}_1$ と ϕ について

$$\widehat{U} \stackrel{\text{def}}{=} \widehat{A} - \frac{p+r}{2}J$$

$$U \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{E}[\widehat{U}]$$

$\widehat{\mathbf{e}}_1$: $\widehat{U}$ の最大固有ベクトル

$\mathbf{e}_1$: U の最大固有ベクトル

事実

$$\mathbf{e}_1 = (\underbrace{1, \ldots, 1}_{n\text{ 個}}, \underbrace{-1, \ldots, -1}_{n\text{ 個}}) = \phi$$

$\widehat{\mathbf{e}}_1$ と ϕ について

$$\widehat{U} \overset{\text{def}}{=} \widehat{A} - \frac{p+r}{2}J$$

$$U \overset{\text{def}}{=} \mathrm{E}[\widehat{U}]$$

$\widehat{\mathbf{e}}_1$: $\widehat{U}$ の最大固有ベクトル

$\mathbf{e}_1$: U の最大固有ベクトル

事実

$$\mathbf{e}_1 = (\underbrace{1,\ldots,1}_{n\text{ 個}}, \underbrace{-1,\ldots,-1}_{n\text{ 個}}) = \phi$$

補題

$$\mathrm{sgn}(\widehat{\mathbf{e}}_1) \approx \mathrm{sgn}(\mathbf{e}_1) = \phi$$

$\widehat{\mathbf{e}}_1$ と ϕ について

$$\mathrm{error}(G) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{i \in V : \mathrm{sgn}(\widehat{\mathbf{e}}_1(i)) \neq \mathrm{sgn}(\mathbf{e}_1(i))\}, \quad (\mathrm{c.f.,}\ \mathrm{sgn}(\mathbf{e}_1) = \phi)$$

$\hat{\mathbf{e}}_1$ と ϕ について

$$\mathrm{error}(G) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{i \in V : \mathrm{sgn}(\hat{\mathbf{e}}_1(i)) \neq \mathrm{sgn}(\mathbf{e}_1(i))\}, \quad (\text{c.f., } \mathrm{sgn}(\mathbf{e}_1) = \phi)$$

補題 (Coja-Oghlan; SODA05)

$$p - r = \Omega\left(\frac{\log n}{n}\right) \longrightarrow \Pr_{G \in \mathcal{G}_{2n,p,r}} \{|\mathrm{error}(G)| = o(1)\} = 1 - o(1)$$

Spect に関する定理

定理 (Coja-Oghlan; SODA05)

$$p - r = \Omega\left(\frac{\log n}{n}\right), \quad \mathrm{UPDATES} \geq \log n$$

$$\longrightarrow \quad \Pr_{G \in \mathcal{G}_{2n,p,r}} \{\mathtt{Spect}(G, p, r) = \phi\} = 1 - o(1)$$

Spect に関する定理

定理 (Coja-Oghlan; SODA05)

$$p - r = \Omega\left(\frac{\log n}{n}\right), \quad \text{UPDATES} \geq \log n$$

$$\longrightarrow \quad \Pr_{G \in \mathcal{G}_{2n,p,r}} \{\mathtt{Spect}(G, p, r) = \phi\} = 1 - o(1)$$

N. Alon and N. Kahale, "A spectral technique for coloring random 3-colorable graphs", SIAM J. Comp. 26, 1997.

U. Feige and E. Ofek, Spectral techniques applied to sparse random graphs, Random Structure and Algorithms 27, 2005.

確率伝播（Belief Propagation）

確率伝播：Pseudo-BP by Onsjö and Watanabe [ISAAC06]

Pseudo-BP$(G = (V, E), p, r)$
{

確率伝播：Pseudo-BP by Onsjö and Watanabe [ISAAC06]

$\texttt{Pseudo-BP}(G = (V, E), p, r)$
$\{$
    set $b_i = 0$ except for $b_1 = 1$;

確率伝播：Pseudo-BP by Onsjö and Watanabe [ISAAC06]

Pseudo-BP$(G = (V, E), p, r)$

{

set $b_i = 0$ except for $b_1 = 1$;

repeat MAXTIMES times do {

Pseudo-BP$(G = (V, E), p, r)$
{
set $b_i = 0$ except for $b_1 = 1$;
repeat MAXTIMES times do {
for each $i \in V$ do (in parallel) {

$$b_i = \sum_{j \in N_i} f_+(b_j) + \sum_{j \notin N_i} f_-(b_j);$$

};
if all b_i are stabilized, then break;
};
output $(\mathrm{sgn}(b_1), \ldots, \mathrm{sgn}(b_{2n}))$;
}

確率伝播：Pseudo-BP by Onsjö and Watanabe [ISAAC06]

Pseudo-BP$(G = (V, E), p, r)$
{
 set $b_i = 0$ except for $b_1 = 1$;
 repeat MAXTIMES times do {
  for each $i \in V$ do (in parallel) {

$$b_i = \sum_{j \in N_i} f_+(b_j) + \sum_{j \notin N_i} f_-(b_j);$$

  };
  if all b_i are stabilized, then break;
 };
 output $(\mathrm{sgn}(b_1), \ldots, \mathrm{sgn}(b_{2n}))$;
}

伝播規則 by Onsjö and Watanabe [ISAAC06]

$$b_i = \sum_{j \in N_i} f_+(b_j) + \sum_{j \notin N_i} f_-(b_j)$$

伝播規則 by Onsjö and Watanabe [ISAAC06]

$$b_i = \sum_{j \in N_i} f_+(b_j) + \sum_{j \notin N_i} f_-(b_j)$$

$$f_+(z) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} h_+\theta_+ & z > \theta_+ \\ h_+(-\theta_+) & z < \theta_+ \\ h_+ z & \text{o.w.} \end{cases}$$

$$f_-(z) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} h_-\theta_- & z > \theta_- \\ h_-(-\theta_-) & z < \theta_- \\ h_- z & \text{o.w.} \end{cases}$$

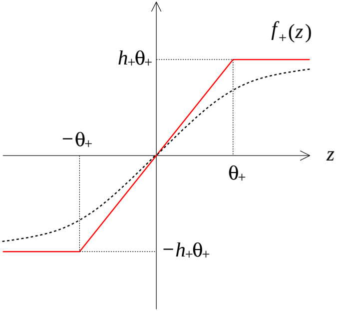
$h_+, \theta_+, \theta_- > 0$: p, r **の関数**
$h_- < 0$: p, r **の関数**

伝播規則 by Onsjö and Watanabe [ISAAC06]

$$b_i = \sum_{j \in N_i} f_+(b_j) + \sum_{j \notin N_i} f_-(b_j)$$

$$f_+(z) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} h_+\theta_+ & z > \theta_+ \\ h_+(-\theta_+) & z < \theta_+ \\ h_+ z & \text{o.w.} \end{cases}$$

$$f_-(z) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} h_-\theta_- & z > \theta_- \\ h_-(-\theta_-) & z < \theta_- \\ h_- z & \text{o.w.} \end{cases}$$



$h_+, \theta_+, \theta_- > 0$: p, r **の関数**

$h_- < 0$: p, r **の関数**

```
Pseudo-BP(G = (V, E), p, r)
{
    set b_i = 0 except for b_1 = 1;
    repeat MAXTIMES times do {
        for each i ∈ V do (in parallel) {
```

$$b_i = \sum_{j \in N_i} f_+(b_j) + \sum_{j \notin N_i} f_-(b_j);$$

```
        };
        if all b_i are stabilized, then break;
    };
    output (sgn(b_1), ..., sgn(b_2n));
}
```

Pseudo-BP に関する定理

Pseudo-BP[r]: Pseudo-BP with MAXTIMES$=r$

Pseudo-BP に関する定理

Pseudo-BP$[r]$: Pseudo-BP with MAXTIMES$=r$

定理 (Onsjö and Watanabe; ISAAC06)

$$p - r = \Omega\left(\frac{\log n}{\sqrt{n}}\right) \quad \longrightarrow$$

Pseudo-BP に関する定理

Pseudo-BP[r]: Pseudo-BP with MAXTIMES=r

定理 (Onsjö and Watanabe; ISAAC06)

$$p - r = \Omega\left(\frac{\log n}{\sqrt{n}}\right) \longrightarrow$$

$$\Pr_{G \in \mathcal{G}_{2n,p,r}} \{\texttt{Pseudo-BP}[2](G, p, r) = \phi\} = 1 - o(1)$$

Pseudo-BP に関する定理

Pseudo-BP$[r]$: Pseudo-BP with MAXTIMES$=r$

定理 (Onsjö and Watanabe; ISAAC06)

$$p - r = \Omega\left(\frac{\log n}{\sqrt{n}}\right) \longrightarrow$$

$$\Pr_{G \in \mathcal{G}_{2n,p,r}} \{\texttt{Pseudo-BP}[2](G, p, r) = \phi\} = 1 - o(1)$$

注

$$p - r = \Omega\left(\frac{\log n}{\sqrt{n}}\right) \longrightarrow \mathrm{E}[|E|] = \omega(n^{1.5})$$

我々のアルゴリズムとその解析

アルゴリズム：MP-threshold

$\texttt{MP-threshold}(G = (V, E), p, r)$
$\{$

アルゴリズム：MP-threshold

MP-threshold$(G = (V, E), p, r)$

{

    set $b_i = 0$ except for $b_1 = 1$;

アルゴリズム：MP-threshold

MP-threshold$(G = (V, E), p, r)$
{
set $b_i = 0$ except for $b_1 = 1$;
repeat MAXTIMES1 times do {
repeat-procedure1;
};

```
MP-threshold(G = (V, E), p, r)
{
        set b_i = 0 except for b_1 = 1;
        repeat MAXTIMES1 times do {
                repeat-procedure1;
        };
        repeat MAXTIMES2 times do {
                repeat-procedure2;
        };
```

アルゴリズム：MP-threshold

$\texttt{MP-threshold}(G = (V, E), p, r)$

{

set $b_i = 0$ except for $b_1 = 1$;

repeat MAXTIMES1 times do {

repeat-procedure1;

};

repeat MAXTIMES2 times do {

repeat-procedure2;

};

output $(\mathrm{sgn}(b_1), \ldots, \mathrm{sgn}(b_{2n}))$

}

repeat-procedure

repeat-procedure1:

{

for each $i \in V$ do (in parallel) mp-procedure(i);

};

repeat-procedure

repeat-procedure1:
{
  for each $i \in V$ do (in parallel) mp-procedure(i);
};

mp-procedure(i): $$b_i = \sum_{j \in N_i} h'_+ b_j + \sum_{j \notin N_i} h'_- b_j;$$

repeat-procedure1:

{

for each $i \in V$ do (in parallel) mp-procedure(i);

};

mp-procedure(i): $$b_i = \sum_{j \in N_i} h'_+ b_j + \sum_{j \notin N_i} h'_- b_j;$$

c.f. Pseudo-BP では： $$b_i = \sum_{j \in N_i} f_+(b_j) + \sum_{j \notin N_i} f_-(b_j);$$

repeat-procedure

repeat-procedure1:

{

for each $i \in V$ do (in parallel) mp-procedure(i);

};

repeat-procedure2: // θ：正のパラメータ

{

apply thresholds: $\begin{cases} b_i = \theta & \text{if } b_i > \theta, \\ b_i = -\theta & \text{if } b_i < -\theta \end{cases}$

for each $i \in V$ do (in parallel) mp-procedure(i);

};

mp-procedure(i): $$b_i = \sum_{j \in N_i} h'_+ b_j + \sum_{j \notin N_i} h'_- b_j;$$

c.f. Pseudo-BP では： $$b_i = \sum_{j \in N_i} f_+(b_j) + \sum_{j \notin N_i} f_-(b_j);$$

アルゴリズム：MP-threshold

MP-threshold$(G = (V, E), p, r)$

{

set $b_i = 0$ except for $b_1 = 1$;

repeat MAXTIMES1 times do {

repeat-procedure1;

};

repeat MAXTIMES2 times do {

repeat-procedure2;

};

output $(\mathrm{sgn}(b_1), \ldots, \mathrm{sgn}(b_{2n}))$

}

MP-threshlod に関する定理

$$\texttt{MP-threshold}[r_1, r_2, \alpha] : \texttt{MP-threshold with} \begin{cases} \text{MAXTIMES1} = r_1 \\ \text{MAXTIMES2} = r_2 \\ \theta = \alpha \end{cases}$$

MP-threshlod に関する定理

$$\texttt{MP-threshold}[r_1, r_2, \alpha] : \texttt{MP-threshold} \text{ with } \begin{cases} \text{MAXTIMES1} = r_1 \\ \text{MAXTIMES2} = r_2 \\ \theta = \alpha \end{cases}$$

定理

$p - r = \Omega(\log n / n)$ **であるとする．**

MP-threshlod に関する定理

$$\texttt{MP-threshold}[r_1, r_2, \alpha] : \texttt{MP-threshold} \text{ with } \begin{cases} \text{MAXTIMES1} = r_1 \\ \text{MAXTIMES2} = r_2 \\ \theta = \alpha \end{cases}$$

定理

$p - r = \Omega(\log n/n)$ であるとする．この時，次のようなパラメータ：

$$\begin{aligned} r_1 &= \Omega(\log n/\log(pn)), \\ r_2 &= \Omega(\log n), \\ \alpha &= \Omega(1), \end{aligned}$$

に対して，以下が成り立つ：

MP-threshlod に関する定理

$$\texttt{MP-threshold}[r_1, r_2, \alpha]: \texttt{MP-threshold with} \begin{cases} \text{MAXTIMES1} = r_1 \\ \text{MAXTIMES2} = r_2 \\ \theta = \alpha \end{cases}$$

定理

$p - r = \Omega(\log n / n)$ であるとする．この時，次のようなパラメータ：

$$\begin{aligned} r_1 &= \Omega(\log n / \log(pn)), \\ r_2 &= \Omega(\log n), \\ \alpha &= \Omega(1), \end{aligned}$$

に対して，以下が成り立つ：

$$\Pr_{G \in \mathcal{G}_{2n,p,r}} \{\texttt{MP-threshold}[r_1, r_2, \alpha](G, p, r) = \phi\} = 1 - o(1)$$

MP-threshlod に関する定理

定理

$p - r = \Omega(\log n / n)$ であるとする．この時，次のようなパラメータ：

$$\begin{aligned} r_1 &= \Omega(\log n / \log(pn)), \\ r_2 &= \Omega(\log n), \\ \alpha &= \Omega(1), \end{aligned}$$

に対して，以下が成り立つ：

$$\Pr_{G \in \mathcal{G}_{2n,p,r}} \{\texttt{MP-threshold}[r_1, r_2, \alpha](G, p, r) = \phi\} = 1 - o(1)$$

注

$$p - r = \Omega\left(\frac{\log n}{n}\right) \longrightarrow \mathrm{E}[|E|] = \Omega(n \log n)$$

Spect, Pseudo-BP との比較

Spect との比較

MP-threshold	:	**確率伝播のみ**
Spect	:	**固有値計算＋確率伝播**

Spect, Pseudo-BP との比較

Spect との比較

MP-threshold : **確率伝播のみ**

Spect : **固有値計算＋確率伝播**

Pseudo-BP との比較

MP-threshold : $\mathrm{max}\{\mathrm{MAXTIMES1}, \mathrm{MAXTIMES2}\} = \Omega(\log n)$

Pseudo-BP : $\mathrm{MAXTIMES} = 2$

Spect, Pseudo-BP との比較

Spect との比較

MP-threshold : **確率伝播のみ**

Spect : **固有値計算＋確率伝播**

Pseudo-BP との比較

MP-threshold : $\max\{\mathrm{MAXTIMES1}, \mathrm{MAXTIMES2}\} = \Omega(\log n)$

$\longrightarrow \mathrm{E}[|E|] = \Omega(n \log n)$

Pseudo-BP : $\mathrm{MAXTIMES} = 2$

$\longrightarrow \mathrm{E}[|E|] = \omega(n^{1.5})$

repeat-procedure

repeat-procedure1:

{

for each $i \in V$ do (in parallel) mp-procedure(i);

};

repeat-procedure2: // θ：正のパラメータ

{

apply thresholds: $\begin{cases} b_i = \theta & \text{if } b_i > \theta, \\ b_i = -\theta & \text{if } b_i < -\theta \end{cases}$

for each $i \in V$ do (in parallel) mp-procedure(i);

};

mp-procedure(i): $$b_i = \sum_{j \in N_i} h'_+ b_j + \sum_{j \notin N_i} h'_- b_j;$$

c.f. Pseudo-BP では： $$b_i = \sum_{j \in N_i} f_+(b_j) + \sum_{j \notin N_i} f_-(b_j);$$

伝播規則

Pseudo-BP の伝播規則

$$b_i = \sum_{j \in N_i} f_+(b_j) + \sum_{j \notin N_i} f_-(b_j)$$

$$\left[\begin{array}{l} f_+(z) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \begin{cases} h_+\theta_+ & z > \theta_+ \\ h_+(-\theta_+) & z < \theta_+ \\ h_+ z & \text{o.w.} \end{cases} \\ \\ f_-(z) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \begin{cases} h_-\theta_- & z > \theta_- \\ h_-(-\theta_-) & z < \theta_- \\ h_- z & \text{o.w.} \end{cases} \end{array}\right.$$

伝播規則

$$b_i = \sum_{j \in N_i} f_+(b_j) + \sum_{j \notin N_i} f_-(b_j) \quad \left[\begin{array}{lll} f_+(z) & \stackrel{\mathrm{def}}{=} & \begin{cases} h_+\theta_+ & z > \theta_+ \\ h_+(-\theta_+) & z < \theta_+ \\ \color{red}{h_+ z} & \text{o.w.} \end{cases} \\ f_-(z) & \stackrel{\mathrm{def}}{=} & \begin{cases} h_-\theta_- & z > \theta_- \\ h_-(-\theta_-) & z < \theta_- \\ \color{red}{h_- z} & \text{o.w.} \end{cases} \end{array} \right.$$

伝播規則

$$b_i = \sum_{j \in N_i} f_+(b_j) + \sum_{j \notin N_i} f_-(b_j) \quad \left[\begin{array}{lll} f_+(z) & \stackrel{\text{def}}{=} & \color{red}{h_+ z} \\ & & \\ f_-(z) & \stackrel{\text{def}}{=} & \color{red}{h_- z} \end{array} \right.$$

伝播規則

$$b_i = \sum_{j \in N_i} f_+(b_j) + \sum_{j \notin N_i} f_-(b_j) \quad \left[\begin{array}{lcl} f_+(z) & \stackrel{\text{def}}{=} & h_+ z \\ f_-(z) & \stackrel{\text{def}}{=} & h_- z \end{array} \right.$$

$$\Longrightarrow \quad b_i \quad = \quad \sum_{j \in N_i} h_+ b_j + \sum_{j \notin N_i} h_- b_j$$

伝播規則

$$b_i = \sum_{j \in N_i} f_+(b_j) + \sum_{j \notin N_i} f_-(b_j) \quad \left[\begin{array}{lcl} f_+(z) & \stackrel{\text{def}}{=} & h_+ z \\ f_-(z) & \stackrel{\text{def}}{=} & h_- z \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow \quad b_i &= \sum_{j \in N_i} h_+ b_j + \sum_{j \notin N_i} h_- b_j \\ &= \sum_j a_{ij} h_+ b_j + \sum_j (1 - a_{ij}) h_- b_j \end{aligned}$$

伝播規則

$$b_i = \sum_{j \in N_i} f_+(b_j) + \sum_{j \notin N_i} f_-(b_j) \quad \left[\begin{array}{lcl} f_+(z) & \stackrel{\text{def}}{=} & h_+ z \\ f_-(z) & \stackrel{\text{def}}{=} & h_- z \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow \quad b_i &= \sum_{j \in N_i} h_+ b_j + \sum_{j \notin N_i} h_- b_j \\ &= \sum_j a_{ij} h_+ b_j + \sum_j (1 - a_{ij}) h_- b_j \\ &= h_+ \widehat{A} \mathbf{b} + h_- (J - \widehat{A}) \mathbf{b} \end{aligned}$$

伝播規則

$$b_i = \sum_{j \in N_i} f_+(b_j) + \sum_{j \notin N_i} f_-(b_j) \quad \left[\begin{array}{lcl} f_+(z) & \stackrel{\text{def}}{=} & h_+ z \\ f_-(z) & \stackrel{\text{def}}{=} & h_- z \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow \quad b_i &= \sum_{j \in N_i} h_+ b_j + \sum_{j \notin N_i} h_- b_j \\ &= \sum_j a_{ij} h_+ b_j + \sum_j (1 - a_{ij}) h_- b_j \\ &= h_+ \widehat{A} \mathbf{b} + h_- (J - \widehat{A}) \mathbf{b} \\ &= \left((h_+ - h^-) \widehat{A} + h_- J \right) \mathbf{b} \end{aligned}$$

伝播規則

伝播規則の行列表現

$$\mathbf{b} = \left((h_+ - h_-)\widehat{A} + h_- J \right) \mathbf{b}$$

伝播規則

伝播規則の行列表現

$$\mathbf{b} = \left((h_+ - h_-)\widehat{A} + h_- J \right) \mathbf{b}$$

$b_i^{(k)}$: k 回の伝播後の頂点 i の信念
$\mathbf{b}^{(k)}$: $b_i^{(k)}$ のベクトル

伝播規則

伝播規則の行列表現

$$\mathbf{b} = \left((h_+ - h_-)\widehat{A} + h_- J \right) \mathbf{b}$$

$b_i^{(k)}$: k 回の伝播後の頂点 i の信念

$\mathbf{b}^{(k)}$: $b_i^{(k)}$ のベクトル

伝播規則の漸化式表現

$$\mathbf{b}^{(k)} = \left((h_+ - h_-)\widehat{A} + h_- J \right) \mathbf{b}^{(k-1)}$$

伝播規則

覚え書き

$$\mathbf{b}^{(k)} = \left((h_+ - h_-)\widehat{A} + h_- J \right) \mathbf{b}^{(k-1)}$$

$$\left.\begin{aligned} h_+ &= \frac{p-r}{p+r} \\ h_- &= -\frac{p-r}{2-(p+r)} \end{aligned}\right\}$$

伝播規則

覚え書き

$$\mathbf{b}^{(k)} = \left((h_+ - h_-)\widehat{A} + h_- J\right)\mathbf{b}^{(k-1)}$$

$$\left.\begin{aligned} h_+ &= \frac{p-r}{p+r} \\ h_- &= -\frac{p-r}{2-(p+r)} \end{aligned}\right\} \xrightarrow{\text{c.f. } \frac{h_-}{h_+} = \frac{h'_-}{h'_+}} \left\{\begin{aligned} h'_+ &= 1 - \frac{p+r}{2} \\ h'_- &= -\frac{p+r}{2} \end{aligned}\right.$$

伝播規則

覚え書き

$$\mathbf{b}^{(k)} = \left((h_+ - h_-)\widehat{A} + h_- J \right) \mathbf{b}^{(k-1)}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{b}^{(k)} &= \left((h'_+ - h'_-)\widehat{A} + h'_- J \right) \mathbf{b}^{(k-1)} \\ &= \left(\widehat{A} - \frac{p+r}{2} J \right) \mathbf{b}^{(k-1)}\end{aligned}$$

伝播規則

覚え書き

$$\mathbf{b}^{(k)} = \left((h_+ - h_-)\widehat{A} + h_- J \right) \mathbf{b}^{(k-1)}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{b}^{(k)} &= \left((h'_+ - h'_-)\widehat{A} + h'_- J \right) \mathbf{b}^{(k-1)} \\ &= \underbrace{\left(\widehat{A} - \frac{p+r}{2} J \right)}_{\text{Spect の行列 } \widehat{U}} \mathbf{b}^{(k-1)} \end{aligned}$$

伝播規則

覚え書き

$$\mathbf{b}^{(k)} = \left((h_+ - h_-)\widehat{A} + h_- J\right)\mathbf{b}^{(k-1)}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{b}^{(k)} &= \left((h'_+ - h'_-)\widehat{A} + h'_- J\right)\mathbf{b}^{(k-1)} \\
&= \underbrace{\left(\widehat{A} - \frac{p+r}{2}J\right)}_{\text{Spect の行列 } \widehat{U}}\mathbf{b}^{(k-1)} \\
&= \widehat{U}\cdot\mathbf{b}^{(k-1)}
\end{aligned}$$

伝播規則

覚え書き

$$\mathbf{b}^{(k)} = \left((h_+ - h_-)\widehat{A} + h_- J\right)\mathbf{b}^{(k-1)}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{b}^{(k)} &= \left((h'_+ - h'_-)\widehat{A} + h'_- J\right)\mathbf{b}^{(k-1)} \\
&= \underbrace{\left(\widehat{A} - \frac{p+r}{2}J\right)}_{\text{Spect の行列 } \widehat{U}}\mathbf{b}^{(k-1)} \\
&= \widehat{U}\cdot\mathbf{b}^{(k-1)} \quad \text{(確率伝播規則からの導出)}
\end{aligned}$$

伝播規則

覚え書き

$$\mathbf{b}^{(k)} = \left((h_+ - h_-)\widehat{A} + h_- J\right) \mathbf{b}^{(k-1)}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{b}^{(k)} &= \left((h'_+ - h'_-)\widehat{A} + h'_- J\right) \mathbf{b}^{(k-1)} \\
&= \underbrace{\left(\widehat{A} - \frac{p+r}{2} J\right)}_{\text{Spect の行列 } \widehat{U}} \mathbf{b}^{(k-1)} \\
&= \widehat{U} \cdot \mathbf{b}^{(k-1)} \quad \text{(確率伝播規則からの導出)} \\
&= \widehat{U}^k \cdot \mathbf{b}^{(0)}
\end{aligned}$$

Power Methods

$$
\begin{array}{lcl}
|\widehat{\lambda_1}| \geq \cdots \geq |\widehat{\lambda_{2n}}| & : & \widehat{U}\ \text{の固有値} \\
\widehat{\mathbf{e}_1}, \ldots, \widehat{\mathbf{e}_{2n}} & : & \widehat{U}\ \text{の固有ベクトル}
\end{array}
$$

Power Methods

$$
\begin{array}{lcl}
|\widehat{\lambda_1}| \geq \cdots \geq |\widehat{\lambda_{2n}}| & : & \widehat{U} \text{ の固有値} \\
\widehat{\mathbf{e}_1}, \ldots, \widehat{\mathbf{e}_{2n}} & : & \widehat{U} \text{ の固有ベクトル} \\
\mathbf{b}^{(0)} & : & (1, \underbrace{0, \ldots\ldots, 0}_{2n-1 \text{ 個}})
\end{array}
$$

Power Methods

$|\widehat{\lambda_1}| \geq \cdots \geq |\widehat{\lambda_{2n}}|$: $\widehat{U}$ **の固有値**

$\widehat{\mathbf{e}_1}, \ldots, \widehat{\mathbf{e}_{2n}}$: $\widehat{U}$ **の固有ベクトル**

$\mathbf{b}^{(0)}$: $(1, \underbrace{0, \ldots\ldots, 0}_{2n-1\ \text{個}}) = \sum_{i=1}^{2n} c_i \widehat{\mathbf{e}}_i, \quad \left(c_i = (\mathbf{b}^{(0)}, \widehat{\mathbf{e}}_i)\right)$

Power Methods

$$|\widehat{\lambda_1}| \geq \cdots \geq |\widehat{\lambda_{2n}}| \quad : \quad \widehat{U} \text{ の固有値}$$

$$\widehat{\mathbf{e}_1}, \ldots, \widehat{\mathbf{e}_{2n}} \quad : \quad \widehat{U} \text{ の固有ベクトル}$$

$$\mathbf{b}^{(0)} \quad : \quad (1, \underbrace{0, \ldots\ldots, 0}_{2n-1\text{ 個}}) = \sum_{i=1}^{2n} c_i \widehat{\mathbf{e}}_i, \quad \left(c_i = (\mathbf{b}^{(0)}, \widehat{\mathbf{e}}_i)\right)$$

$$\mathbf{b}^{(k)} = \widehat{U}^k \cdot \mathbf{b}^{(0)} = \widehat{U}^k \sum_{i=1}^{2n} c_i \widehat{\mathbf{e}}_i$$

Power Methods

$|\widehat{\lambda_1}| \geq \cdots \geq |\widehat{\lambda_{2n}}|$: $\widehat{U}$ **の固有値**

$\widehat{\mathbf{e}_1}, \ldots, \widehat{\mathbf{e}_{2n}}$: $\widehat{U}$ **の固有ベクトル**

$\mathbf{b}^{(0)}$: $(1, \underbrace{0, \ldots\ldots, 0}_{2n-1\ \text{個}}) = \sum_{i=1}^{2n} c_i \widehat{\mathbf{e}}_i, \quad \left(c_i = (\mathbf{b}^{(0)}, \widehat{\mathbf{e}}_i)\right)$

$$\begin{aligned} \mathbf{b}^{(k)} &= \widehat{U}^k \cdot \mathbf{b}^{(0)} = \widehat{U}^k \sum_{i=1}^{2n} c_i \widehat{\mathbf{e}}_i \\ &= \widehat{\lambda_1}^k c_1 \widehat{\mathbf{e}_1} + \widehat{\lambda_2}^k c_2 \widehat{\mathbf{e}_2} + \cdots + \widehat{\lambda_{2n}}^k c_{2n} \widehat{\mathbf{e}_{2n}} \end{aligned}$$

Power Methods

$|\widehat{\lambda_1}| \geq \cdots \geq |\widehat{\lambda_{2n}}|$: $\widehat{U}$ **の固有値**

$\widehat{\mathbf{e}_1}, \ldots, \widehat{\mathbf{e}_{2n}}$: $\widehat{U}$ **の固有ベクトル**

$\mathbf{b}^{(0)}$: $(1, \underbrace{0, \ldots\ldots, 0}_{2n-1\ \text{個}}) = \sum_{i=1}^{2n} c_i \widehat{\mathbf{e}_i}, \quad \left(c_i = (\mathbf{b}^{(0)}, \widehat{\mathbf{e}_i})\right)$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{b}^{(k)} &= \widehat{U}^k \cdot \mathbf{b}^{(0)} = \widehat{U}^k \sum_{i=1}^{2n} c_i \widehat{\mathbf{e}_i} \\
&= \widehat{\lambda_1}^k c_1 \widehat{\mathbf{e}_1} + \widehat{\lambda_2}^k c_2 \widehat{\mathbf{e}_2} + \cdots + \widehat{\lambda_{2n}}^k c_{2n} \widehat{\mathbf{e}_{2n}} \\
&= \widehat{\lambda_1}^k \left(c_1 \widehat{\mathbf{e}_1} + \left(\frac{\widehat{\lambda_2}}{\widehat{\lambda_1}} \right)^k c_2 \widehat{\mathbf{e}_2} + \cdots + \left(\frac{\widehat{\lambda_{2n}}}{\widehat{\lambda_1}} \right)^k c_{2n} \widehat{\mathbf{e}_{2n}} \right)
\end{aligned}
$$

Power Methods

$|\widehat{\lambda_1}| \geq \cdots \geq |\widehat{\lambda_{2n}}|$: $\widehat{U}$ の固有値

$\widehat{\mathbf{e}}_1, \ldots, \widehat{\mathbf{e}_{2n}}$: $\widehat{U}$ の固有ベクトル

$\mathbf{b}^{(0)}$: $(1, \underbrace{0, \ldots\ldots, 0}_{2n-1\text{ 個}}) = \sum_{i=1}^{2n} c_i \widehat{\mathbf{e}}_i, \quad \left(c_i = (\mathbf{b}^{(0)}, \widehat{\mathbf{e}}_i)\right)$

$$\mathbf{b}^{(k)} = \widehat{\lambda}_1^{\,k} \left(c_1 \widehat{\mathbf{e}}_1 + \left(\frac{\widehat{\lambda}_2}{\widehat{\lambda}_1}\right)^k c_2 \widehat{\mathbf{e}}_2 + \ \ldots \ + \left(\frac{\widehat{\lambda_{2n}}}{\widehat{\lambda}_1}\right)^k c_{2n} \widehat{\mathbf{e}_{2n}} \right)$$

事実

$$|\widehat{\lambda}_1| > |\widehat{\lambda}_2| \longrightarrow \mathbf{b}^{(k)} \approx \widehat{\lambda}_1^{\,k} c_1 \widehat{\mathbf{e}}_1 \quad \text{as } k \to \infty$$

確率伝播

事実

$$|\widehat{\lambda}_1| > |\widehat{\lambda}_2| \longrightarrow \mathbf{b}^{(k)} \approx \widehat{\lambda}_1^{\,k} c_1 \widehat{\mathbf{e}}_1 \quad as\ k \to \infty$$

確率伝播

事実

$$|\widehat{\lambda}_1| > |\widehat{\lambda}_2| \longrightarrow \mathbf{b}^{(k)} \approx \widehat{\lambda}_1^{\,k} c_1 \widehat{\mathbf{e}}_1 \quad \mathit{as}\ k \to \infty$$

補題 (Coja-Oghlan)

$$\Pr_{G \in \mathcal{G}_{2n,p,r}} \{\mathrm{sgn}(\widehat{\mathbf{e}}_1) \approx \phi\} = 1 - o(1)$$

確率伝播

事実

$$|\widehat{\lambda}_1| > |\widehat{\lambda}_2| \longrightarrow \mathbf{b}^{(k)} \approx \widehat{\lambda}_1^{\,k} c_1 \widehat{\mathbf{e}}_1 \quad \textit{as } k \to \infty$$

補題 (Coja-Oghlan)

$$\Pr_{G \in \mathcal{G}_{2n,p,r}} \{\mathrm{sgn}(\widehat{\mathbf{e}}_1) \approx \phi\} = 1 - o(1)$$

系 (Watanabe and Yamamoto)

$$\Pr_{G \in \mathcal{G}_{2n,p,r}} \{\mathrm{sgn}(\mathbf{b}^{(k)}) \approx \phi\} = 1 - o(1)$$

repeat-procedure

repeat-procedure1:

{

for each $i \in V$ do (in parallel) mp-procedure(i);

};

repeat-procedure2: // θ：正のパラメータ

{

apply thresholds: $\begin{cases} b_i = \theta & \text{if } b_i > \theta, \\ b_i = -\theta & \text{if } b_i < -\theta \end{cases}$

for each $i \in V$ do (in parallel) mp-procedure(i);

};

mp-procedure(i): $\boxed{b_i = \sum_{j \in N_i} h'_+ b_j + \sum_{j \notin N_i} h'_- b_j;}$

c.f. Pseudo-BP では： $b_i = \sum_{j \in N_i} f_+(b_j) + \sum_{j \notin N_i} f_-(b_j);$

確率伝播

$$\mathrm{error}(G) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{error}_L \cup \mathrm{error}_R$$

確率伝播

$$
\begin{aligned}
\mathrm{error}(G) &\stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{error}_L \cup \mathrm{error}_R \\
\mathrm{error}_L &\stackrel{\mathrm{def}}{=} \left\{ i \in V_L : \mathbf{b}^{(k)}(i) < \theta \right\} \\
\mathrm{error}_R &\stackrel{\mathrm{def}}{=} \left\{ i \in V_R : \mathbf{b}^{(k)}(i) > -\theta \right\}
\end{aligned}
$$

確率伝播

$$
\begin{aligned}
\mathrm{error}(G) &\overset{\mathrm{def}}{=} \mathrm{error}_L \cup \mathrm{error}_R \\
\mathrm{error}_L &\overset{\mathrm{def}}{=} \left\{ i \in V_L : \mathbf{b}^{(k)}(i) < \theta \right\} \\
\mathrm{error}_R &\overset{\mathrm{def}}{=} \left\{ i \in V_R : \mathbf{b}^{(k)}(i) > -\theta \right\}
\end{aligned}
$$

補題 (Watanabe and Yamamoto)

$$
\Pr_{G \in \mathcal{G}_{2n,p,r}} \{ |\mathrm{error}(G)| = o(1) \} = 1 - o(1)
$$

確率伝播

補題 (Watanabe and Yamamoto)

$$\Pr_{G \in \mathcal{G}_{2n,p,r}} \{\texttt{Repeat1}(G) \text{ almost recovers}\} = 1 - o(1)$$

確率伝播

補題 (Watanabe and Yamamoto)

$$\Pr_{G \in \mathcal{G}_{2n,p,r}} \{\texttt{Repeat1}(G) \text{ almost recovers}\} = 1 - o(1)$$

補題 (Watanabe and Yamamoto)

$$\Pr_{G \in \mathcal{G}_{2n,p,r}} \{\texttt{Repeat2(G)} = \phi | \texttt{Repeat1}(G) \approx \phi\} = 1 - o(1)$$

確率伝播

補題 (Watanabe and Yamamoto)

$$\Pr_{G \in \mathcal{G}_{2n,p,r}} \{\texttt{Repeat1}(G) \text{ almost recovers}\} = 1 - o(1)$$

補題 (Watanabe and Yamamoto)

$$\Pr_{G \in \mathcal{G}_{2n,p,r}} \{\texttt{Repeat2(G)} = \phi | \texttt{Repeat1}(G) \approx \phi\} = 1 - o(1)$$

定理 (Watanabe and Yamamoto)

$$\Pr_{G \in \mathcal{G}_{2n,p,r}} \{\texttt{MP-threshold}(G, p, r) = \phi\} = 1 - o(1)$$

ま　と　め

まとめ

定理

$$\Pr_{G \in \mathcal{G}_{2n,p,r}} \{\texttt{MP-threshold}(G,p,r) = \phi\} = 1 - o(1)$$

まとめ

定理

$$\Pr_{G \in \mathcal{G}_{2n,p,r}} \{\texttt{MP-threshold}(G, p, r) = \phi\} = 1 - o(1)$$

Spect との比較

MP-threshold : **確率伝播のみ**

Spect : **固有値計算＋確率伝播**

Pseudo-BP との比較

MP-threshold : $\max\{\mathrm{MAXTIMES1}, \mathrm{MAXTIMES2}\} = \Omega(\log n)$

Pseudo-BP : $\mathrm{MAXTIMES} = 2$

今後の課題

`MP-threshold`$(G = (V, E), p, r)$ // **一つの** repeat **文**

{

set $b_i = 0$ except for $b_1 = 1$;

repeat MAXTIMES times do {

repeat-procedure;

};

}

repeat-procedure: // θ **：正のパラメータ**

{

apply thresholds: $\begin{cases} b_i = \theta & \text{if } b_i > \theta, \\ b_i = -\theta & \text{if } b_i < -\theta \end{cases}$

for each $i \in V$ do (in parallel) mp-procedure(i);

};