C06：グラフ構造を有する問題に対する近似アルゴリズムの設計

永持　仁（京都大学）
趙　　亮（京都大学）
宇野裕之（大阪府立大学）
軽野義行（京都工芸繊維大学）

C06：グラフ構造を有する問題に対する近似アルゴリズムの設計

　通信網，交通網，VLSI，自動生産システム，地理情報システム等におけるシステム工学的，情報工学的諸問題を対象として，それらを離散最適化問題として定式化し，当該研究者が業績を残してきたグラフアルゴリズムを中心的な道具として，厳密解法及び理論的な近似保証を持つアルゴリズムの開発を行う.

　さらに，開発された近似アルゴリズムを系統的に整理し，一般的なアルゴリズムの設計原理の発見を目指す.

研究課題

- グラフ連結度問題(福永, 永持)
- 図形処理に関する問題
- グラフのランキング問題
- ファイアウォール高速化のためのデータ構造
- 最長路問題(宇野, 永持)
- スケジューリング問題
- 食品の袋詰め問題(軽野, 永持)

辺連結度・次数制約付きネットワーク設計

入力　節点集合 V,
メトリック辺コスト $c: V \times V \rightarrow \mathrm{Q}_+$
連結度要求 $r: V \times V \rightarrow \mathrm{N}$
次数上下限 $u, l : V \rightarrow \mathrm{N}$

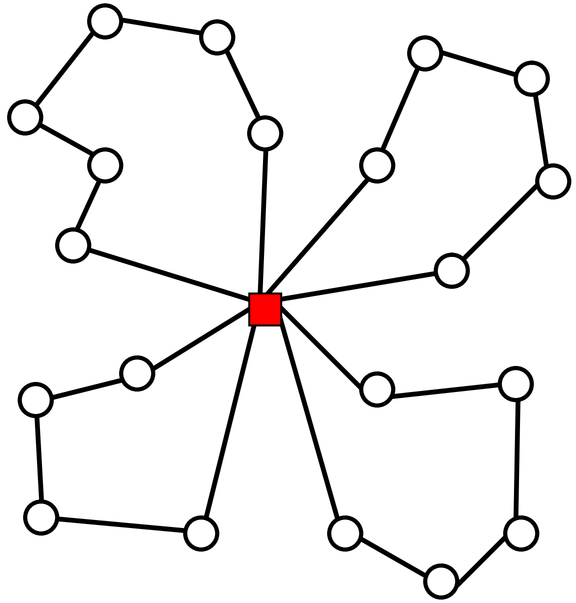
解　コスト最小グラフ $G = (V, E)$

連結度制約　（v, w 間の辺連結度）$\geq r(v,w)$　for $\forall v, w \in V$

次数制約　$u(v) \geq$（v の次数）$\geq l(v)$　for $\forall v \in V$

条件	近似度
$u(v) = \infty, \quad \forall v \in V$	2
$l(v) = 0, \quad \forall v \in V$	2 + 1/min r(v,w)
$u(v)$: 一定, $\forall v \in V$	2 + 1/min r(v,w)
$l(v) = u(v), \quad \forall v \in V,$ $r(v,w) = k, \forall v,w \in V$	2.5 (k: 偶数） 2.5+3/(2k) (k: 奇数)

配送計画問題

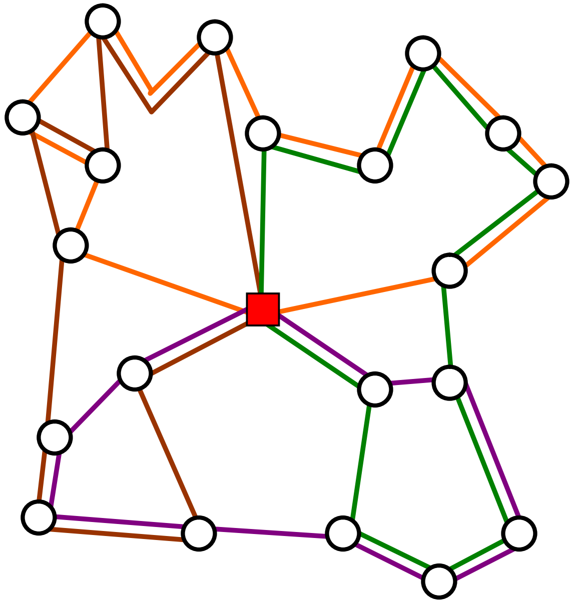

$m = 4$

入力　節点集合 V
基地 $s \in V$
移動距離 $V \times V \rightarrow \mathbb{Q}_+$
車両台数 m

解　コスト和最小閉路 $C_1, \ldots, C_m$
制約　s を含む閉路数 $= m$
v を含む閉路数 $= 1 \quad (\forall v \in V - s)$

$$l(s) = u(s) = 2m$$
$$l(v) = u(v) = 2 \quad (\forall v \in V - s)$$
$$r(v, w) = 2$$

訪問回数指定 配送計画問題



$m = 4,\ \ n = 2$

入力　節点集合 V
基地 $s \in V$
移動距離 $V \times V \rightarrow \mathbb{Q}_+$
車両台数 m
訪問回数 n

解　コスト和最小閉路 $C_1, \ldots, C_m$

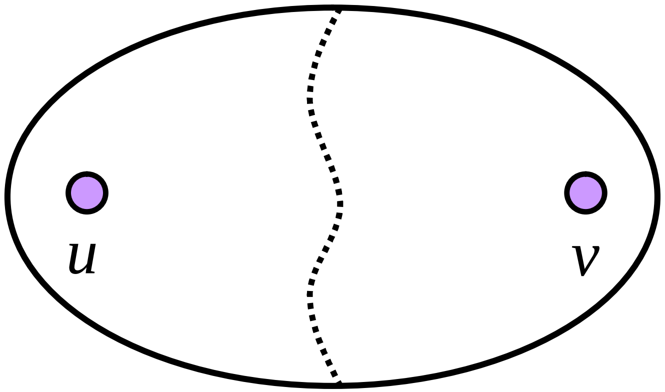
制約　s を含む閉路数 $= m$
v を含む閉路数 $= n$ 　$(\forall v \in V - s)$

$$l(s) = u(s) = 2m$$
$$l(v) = u(v) = 2n \quad (\forall v \in V - s)$$
$$r(v, w) = 2n$$

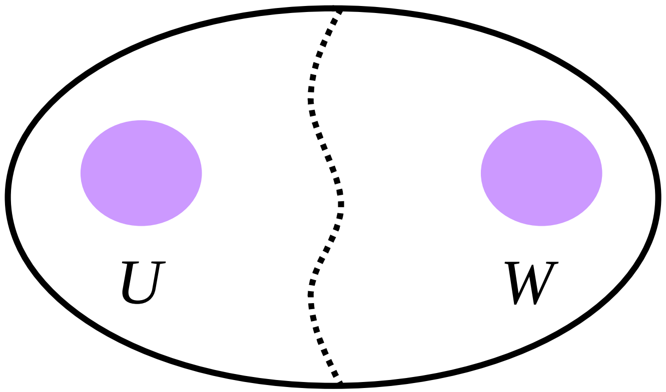
2.5-近似

辺連結度の拡張

節点間辺連結度　$\lambda(u, v\,; G) = \min|\, u, v$ を分ける辺カット $|$



節点集合間辺連結度　$\lambda(U, W\,; G\,) = \min|\, U, W$ を分ける辺カット $|$



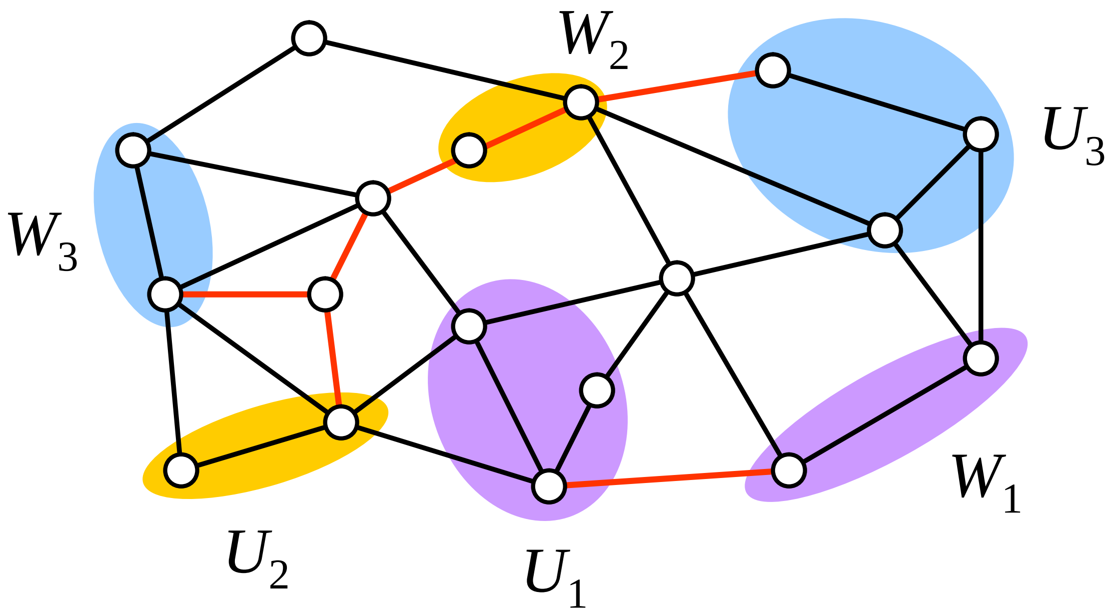
集合連結問題

入力　無向グラフ $G = (V, E)$,　辺コスト $c: E \to Q_+$

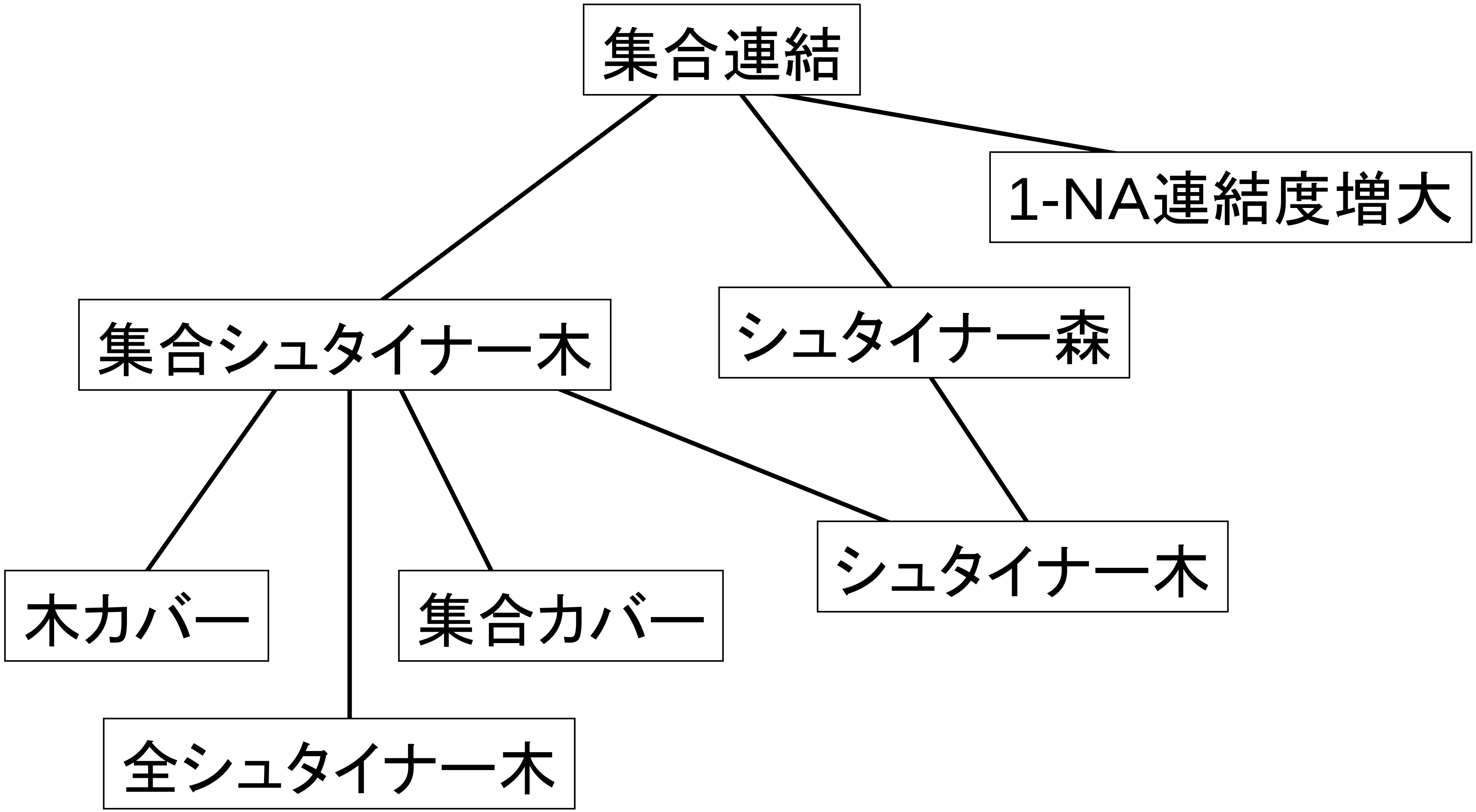
節点集合ペア $(U_1, W_1), \ldots, (U_m, W_m)$

解　$\lambda(U_i, W_i;\ F) \geq 1\ (i = 1,\ldots, m)$ を満たす

コスト最小森 $F \subseteq E$（集合連結と呼ぶ）



集合連結問題と関連問題

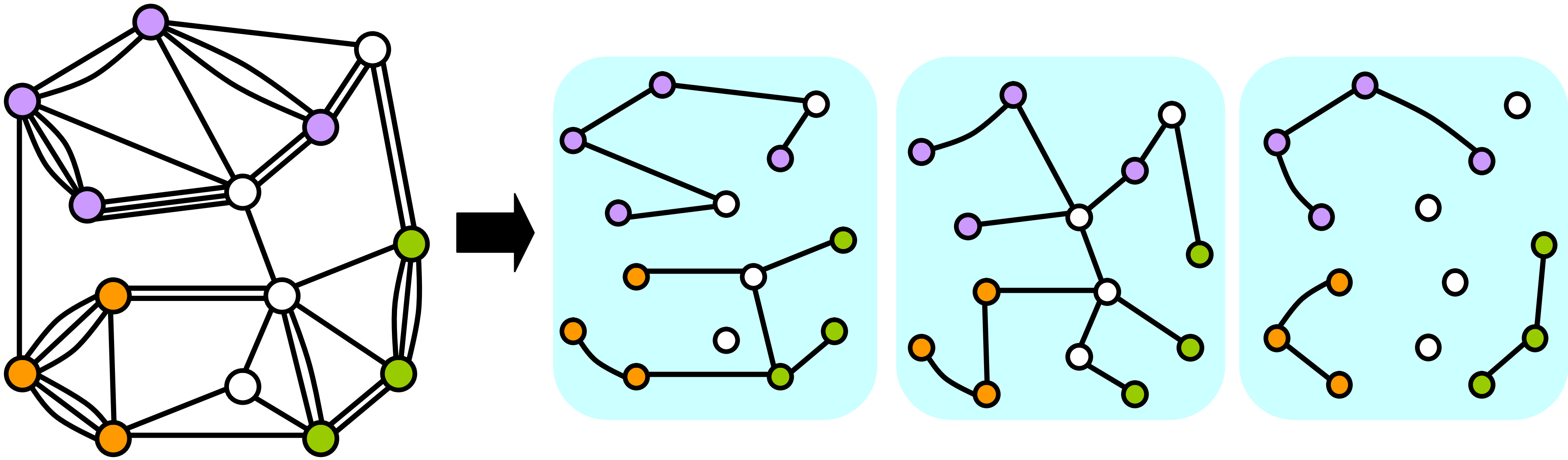


シュタイナー森パッキング

定理 [Chekuri, Shepherd, 2004]

- オイラーグラフ $G = (V, E)$
- V の分割 $\{V_1, \ldots, V_p\}$
- $\lambda(u, v\,; G) \geq 2k \quad (\forall u, v \in V_i)$

ならば, Gは k 個の辺素なシュタイナー森を含む



⇒ 2-近似アルゴリズム

集合連結パッキング定理

定理 [福永，永持，2007]

- Gはオイラーグラフ
- $\lambda(U_i, W_i; \mathrm{G}) \geq 2\alpha k \quad (i = 1, \ldots, m)$

ならば，Gは k 個の辺素な集合連結を含む．ただし，

$$\alpha = \max_{1 \leq i \leq m}(|U_i| + |W_i|) - 1.$$

⇒ 2α-近似アルゴリズム

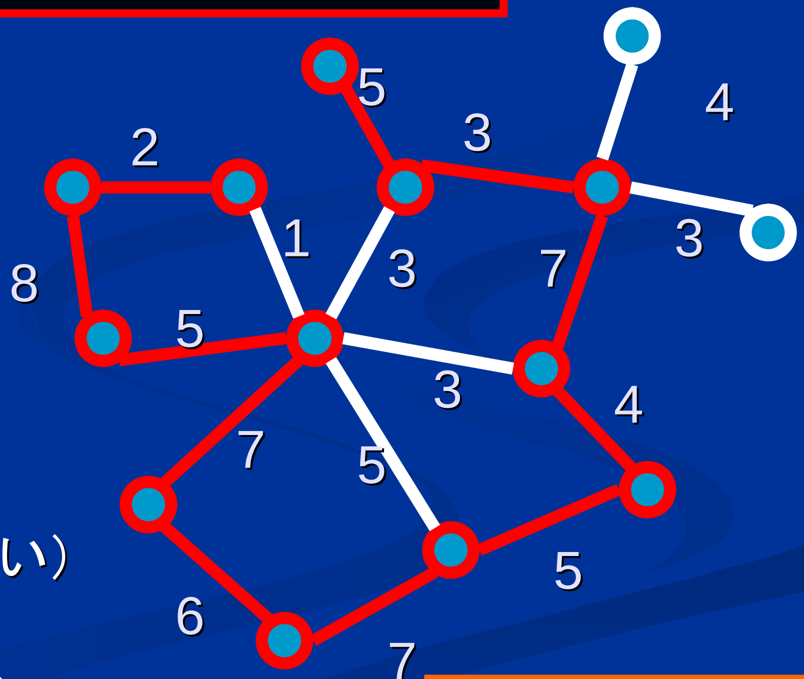
最長路問題(LPP)

最長路問題(LPP)

入力:枝重みつきグラフG=(V, E)

出力:すべての単純路のなかで路長が最大となる路

- 枝$e_{i,j}$　:{点v_i, 点v_j}
- 枝重み$w_{i,j}$　:点v_i, v_j間の重み
- 単純路　:点の系列, 同じ点は通らない
- 路長　: 路が含む枝の重み和



路長:59

■NP困難性

(多項式時間アルゴリズムの存在可能性が低い)

■近似困難性

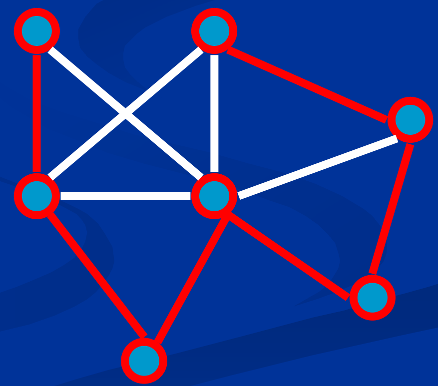
(定数近似比の多項式時間アルゴリズムの〃)

LPPの実用例

- バイオインフォマティクス
  - DNAからの正確な遺伝子情報の復元のための前処理
- スペースデブリ観測レーダーの最適操作
  - 宇宙の危険なゴミの観測レーダーの最適操作計画のための前処理
- 最長片道切符問題
  - JRの発行する片道切符で最も長い距離旅行する片道切符を求める

- TSPの代替の解として使用する

TSPの解（全点を通る閉路）が存在しないグラフ例



全ての枝重みが1のときLPPの解は最も多くの点を通る

代替の解として使用できる

LPPに対する厳密解法のアプローチ

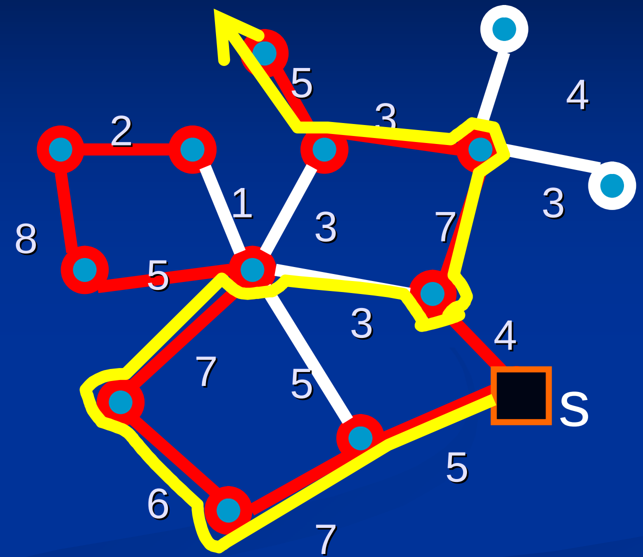
- 汎用の整数計画ソルバーに解かせる
  - ×実行解(路)を求めるための制約条件式の追加が人手による
  - ×高価な商用パッケージに依存
- 限定されたグラフクラスに対する高速な厳密解法
  - ×対象とするグラフが限定されすぎる

- いくぶん汎用の高速厳密解法を設計する
  - 比較的疎なグラフの特徴的な構造を利用
    - 例:平面的グラフ
    - ただしグラフのクラスを完全には限定しない
  - 分枝限定法にもとづく厳密解法
    - 分枝限定法:組合せ最適化問題の厳密解法

始点固定最長路問題の導入

- 始点固定LPPの定義

始点固定LPP
最大化　　$\Sigma_{\forall e \in E}$ we・xe
制約条件　枝集合{e | xe=1}が路を構成
　　　　　xe∈{0,1}
　　　　　路の始点はs

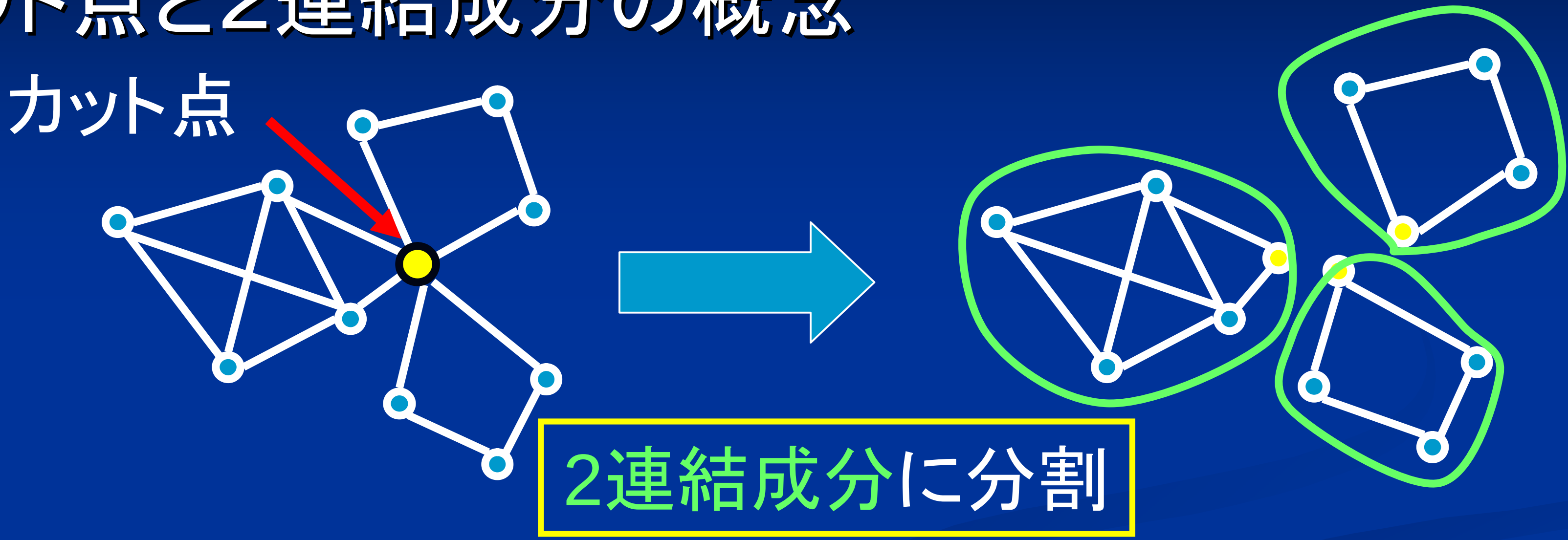


  - 全点に対する始点固定LPPの解のMAX＝LPPの解

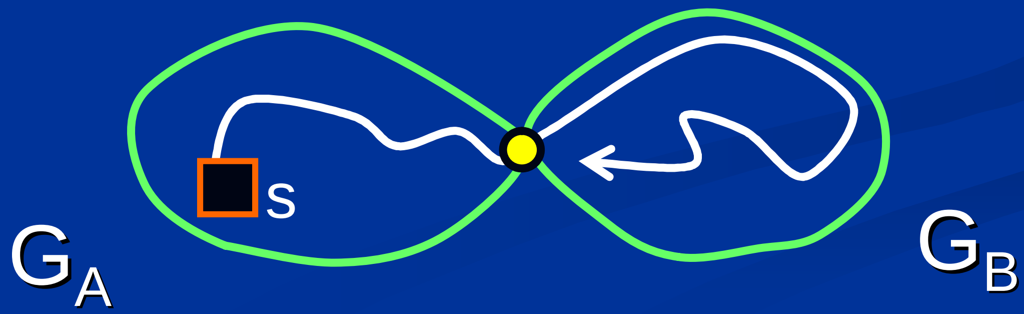
- 始点固定LPPの解に対する考察
  - 始点固定最長路とカット点
  - 次数1, 2の点を通る始点固定最長路

カット点と路

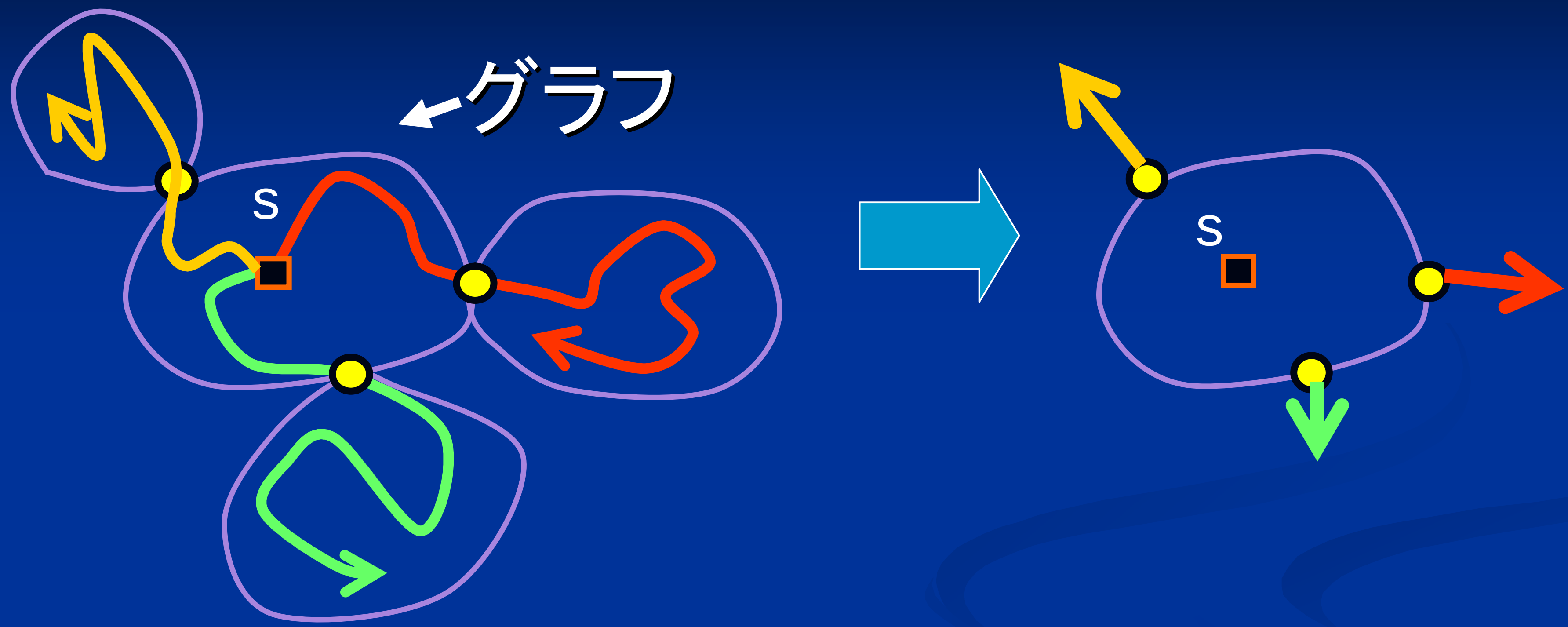
- カット点と2連結成分の概念



- カット点を通る路
  - 2連結成分G_A→2連結成分G_B ~~→~~ 2連結成分G_A



カット点と始点固定最長路



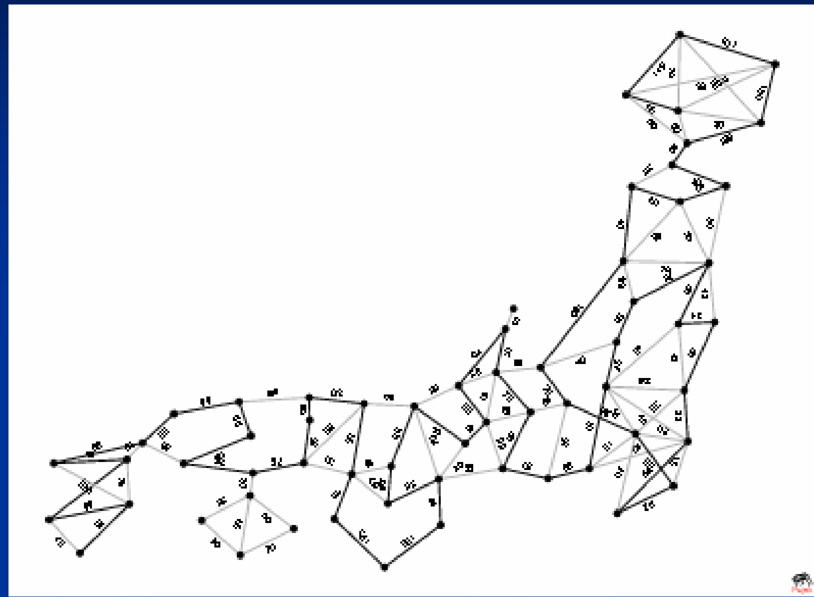
目的:始点sを含む2連結成分以外の除去
制約:始点固定LP長は変化させない
方法:カット点からの始点固定LP長をカット点に与える

分枝限定法の設計

- 始点固定LPPに対する定義
  - 部分問題の定義
  - 分枝の方法
  - （緩和問題の定義）
- グラフのサイズを縮小するアイデアを組み込む
  - 2連結成分分解による前処理
  - 次数1, 2の点の除去処理
- 部分問題の重複計算を省くアイデアを組み込む
  - 2連結成分分解による前処理
  - ハッシュ表による解き済みの部分問題の記憶

実験[アイデアの効果]

- 入力例
  - 点数:58
  - 枝数:100



実験環境:
CPU: Celeron 1GHz
Memory:256MB

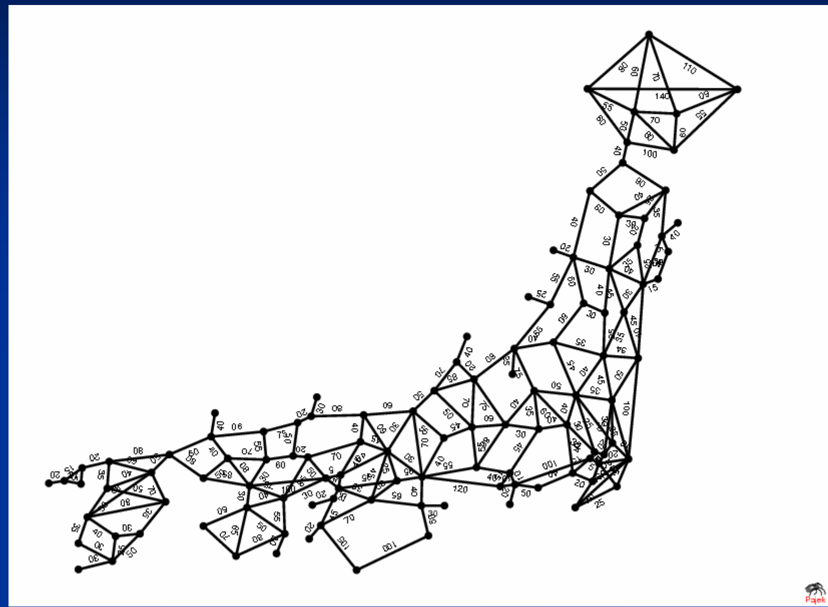
- 結果

	部分問題数	処理時間
分枝限定法(原始的な実装)	**268,926,586**	**25897.351s**
分枝限定法(本アイデア)	**21,378**	**1.889s**

13,709倍の高速化

実験[大規模なグラフ]

- 入力例
  - 点数:110
  - 枝数:200

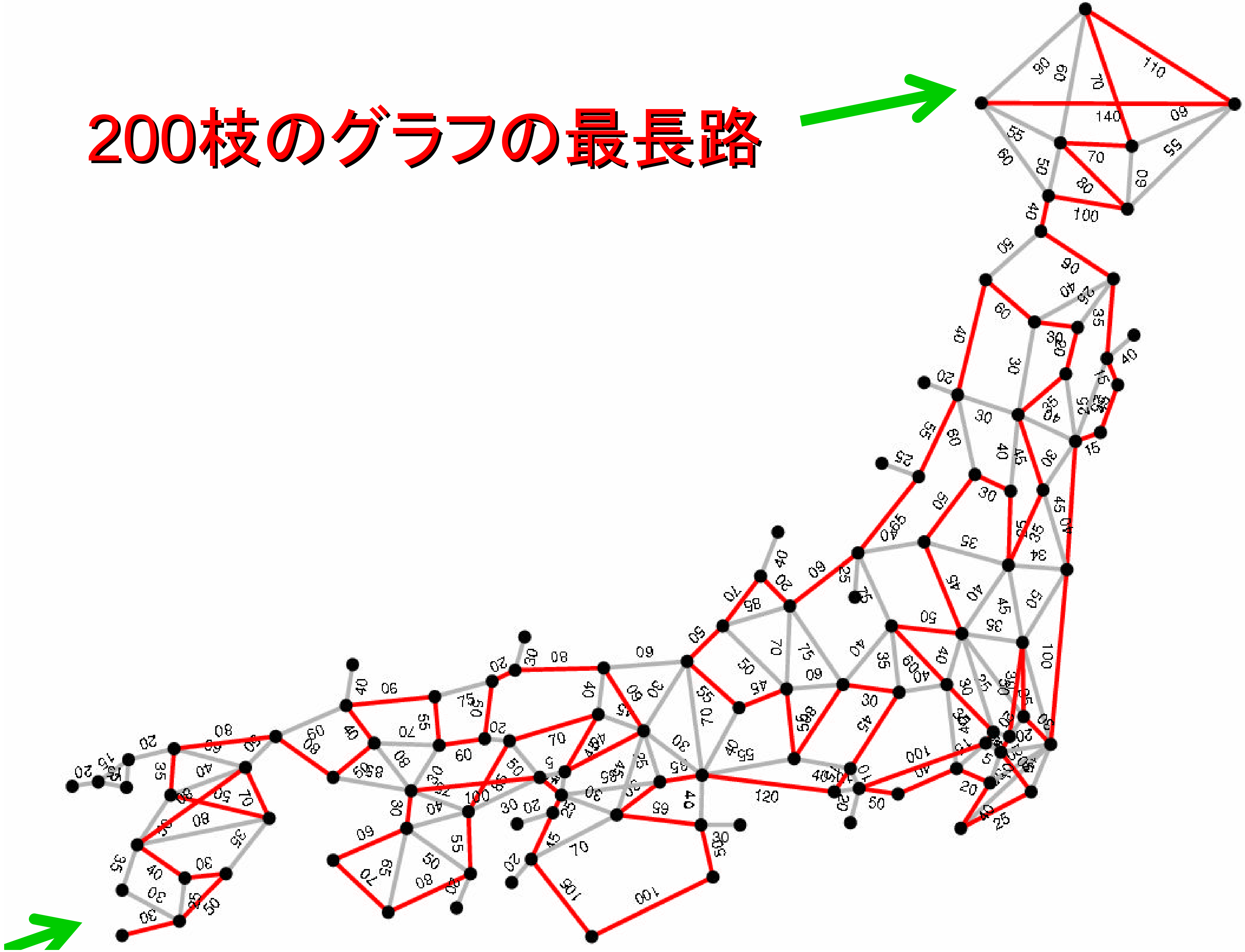


実験環境:
CPU: Pentium 3.0GHz
Memory:2048MB

- 結果

	部分問題数	処理時間
分枝限定法(本アイデア)	**256,122,101**	**19336.156s**

200枝のグラフの最長路



食品の袋詰め問題

　毎回の袋詰め操作で，辞書式二目的0-1ナップサック問題を動的計画法で解く．（その解の結果が次に生成される問題例に影響を与えるので，全体的な観点からはヒューリスティックである．）

　以下，IEによって組合せ計量装置の概略を説明します．

まとめ

- グラフ構造を有する離散最適化問題に対する厳密解法や近似解法の開発を行った.
- 節点集合間辺連結度を定義し，グラフ連結度に関する近似解法に対して，より広いクラスの問題を統一的に扱える理論的基盤を得ることが出来た.
- 最長路問題，スケジューリング問題等についても，昨年度からの研究継続によって新たな知見を得ることが出来た.
- ファイアウォール高速化のためのデータ構造，食品の袋詰め問題等，応用に直結する可能性の高い課題についても一定の成果を収めることが出来た.