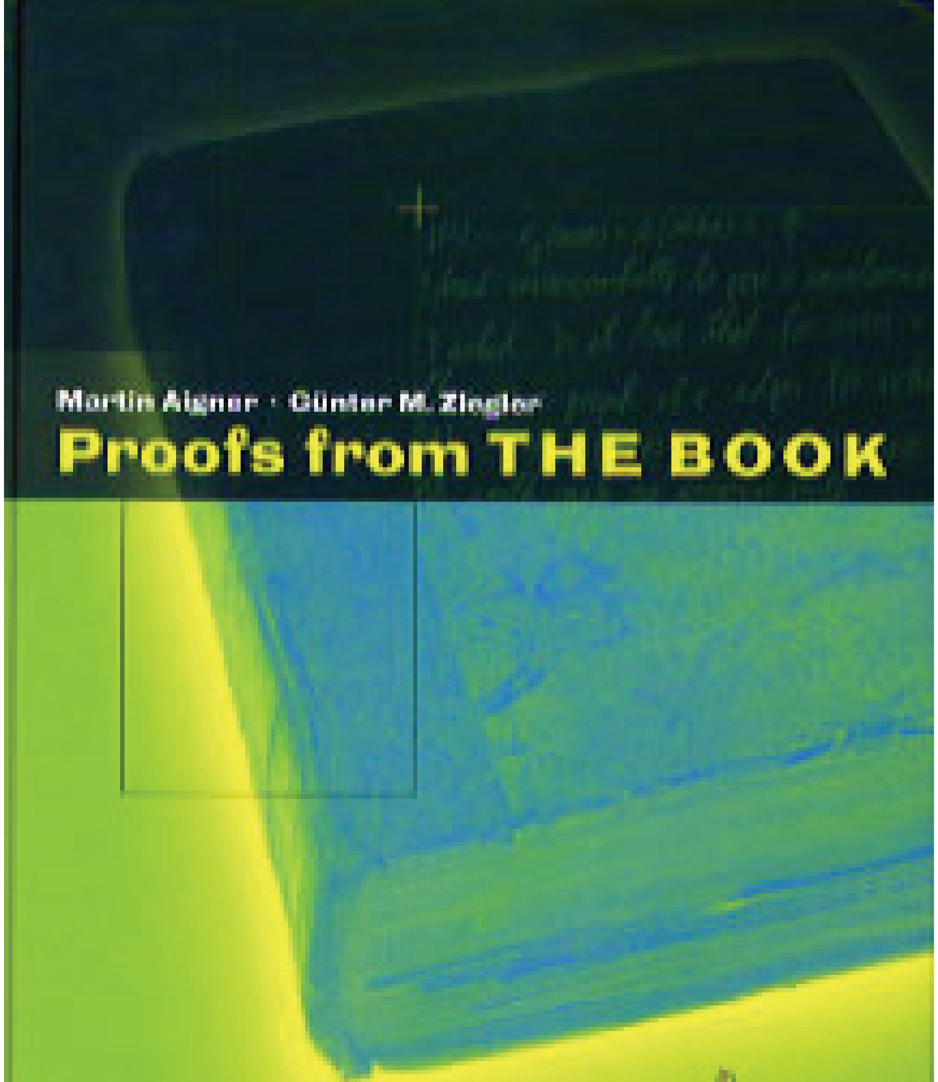


徳山　豪
東北大学

Geometry that professors love

博士たちの愛する幾何

Table of contents

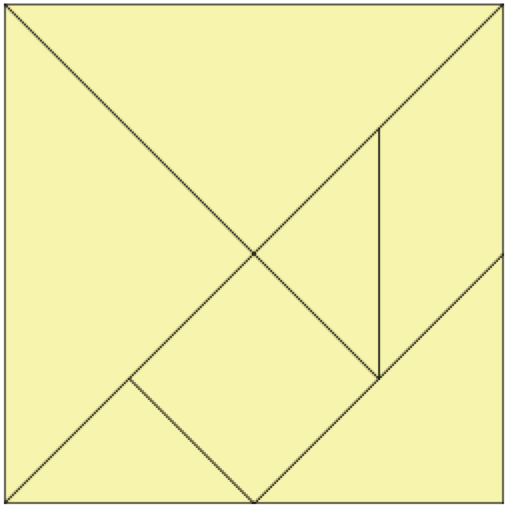
Equidecomposability
分割同値性

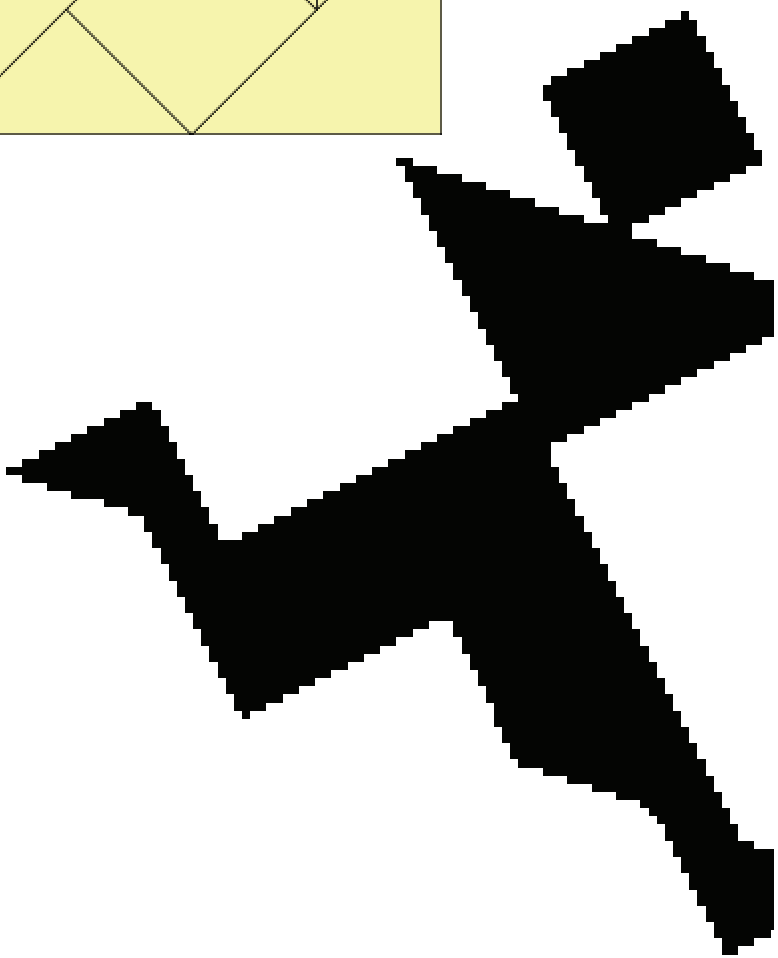
If we have two polygons P and P’ with the same area, what relations do they have?

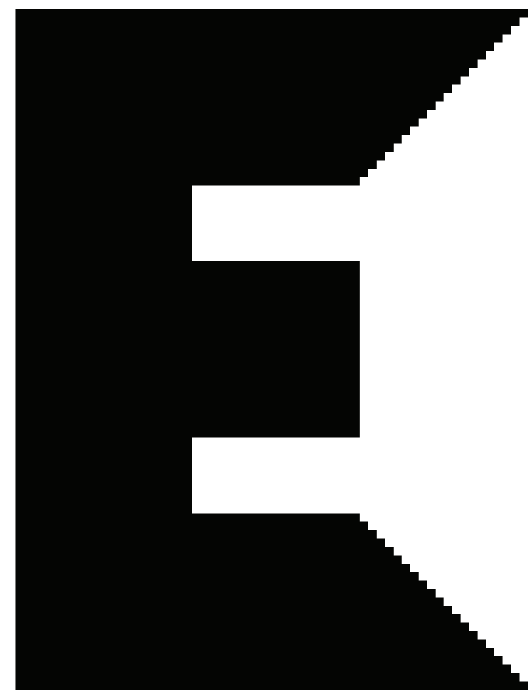
- Equidecomposability problem
  - Is it always possible to decompose P into a finite number of polygonal pieces, and construct P’ by using the pieces?

  面積の等しい多角形は常に分割同値か？

Tangram puzzle

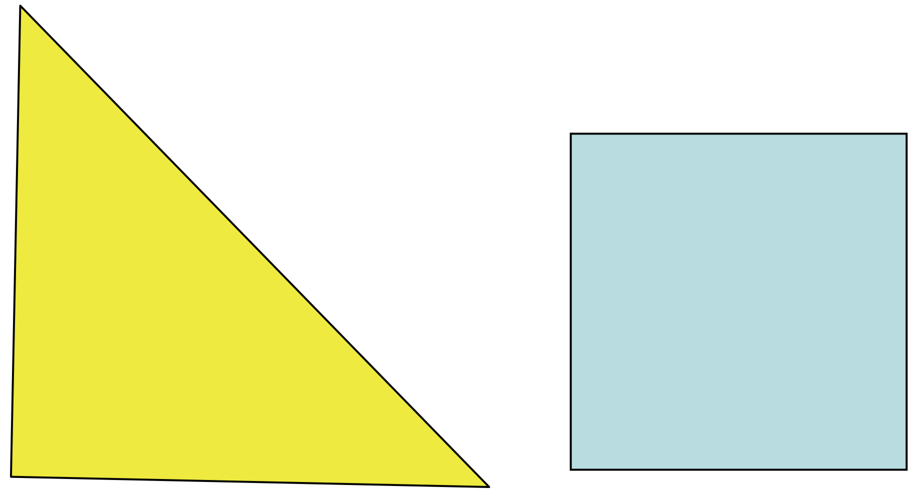


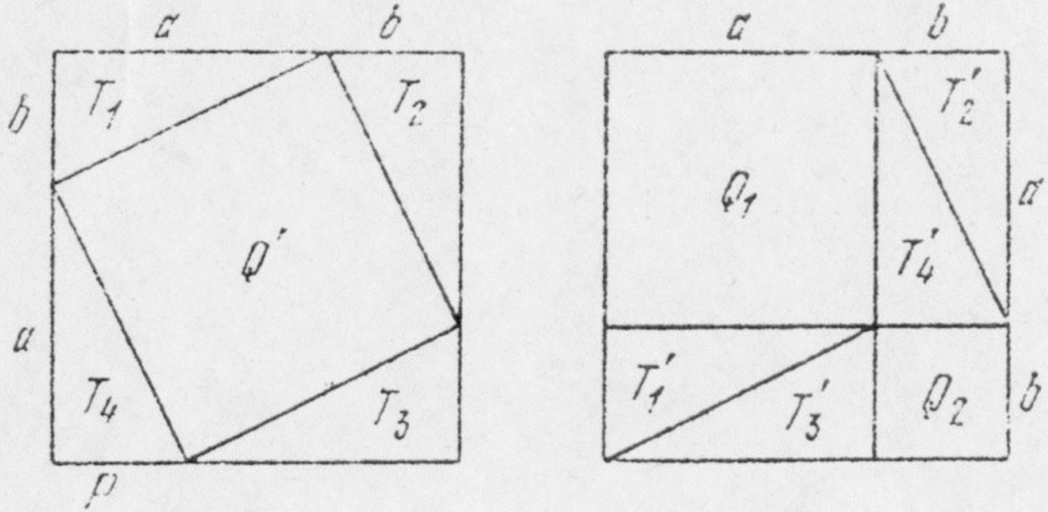




Bolyai-Gerwien’ s theorem（1832）

- Any two polygons with the same area are Equidecomposable
- Easiest example




a
b
b
a
T1
T2
Q'
T4
T3
a
b
a
b
Q1
T'2
T'4
T'1
T'3
Q2

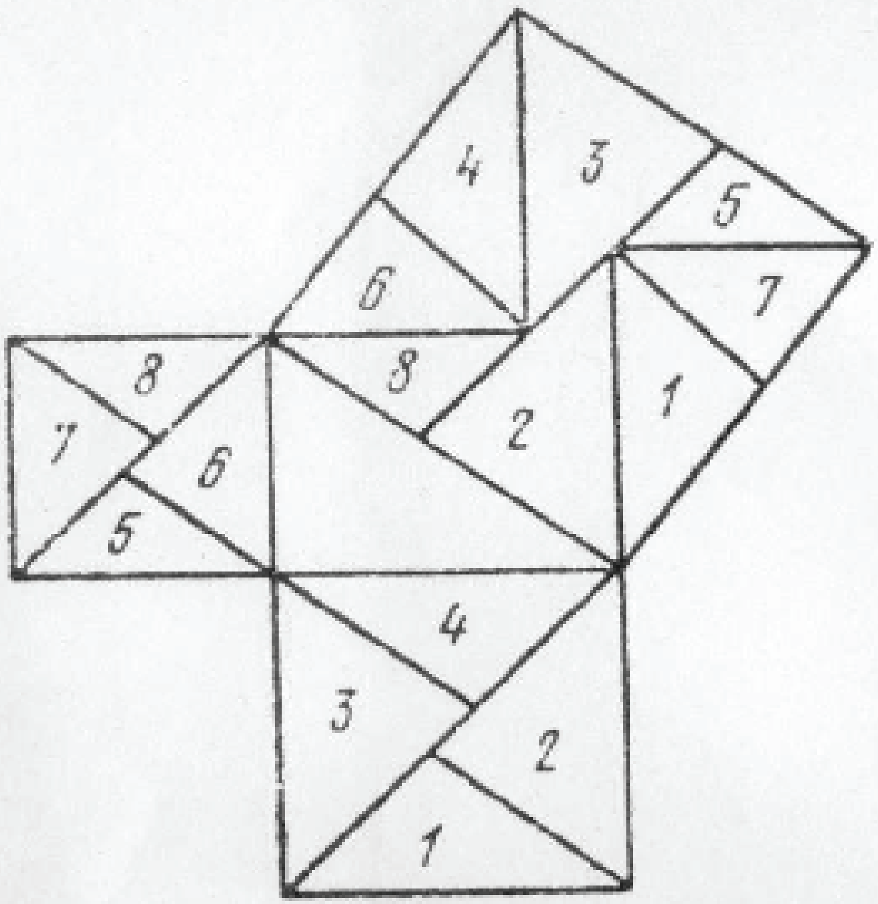
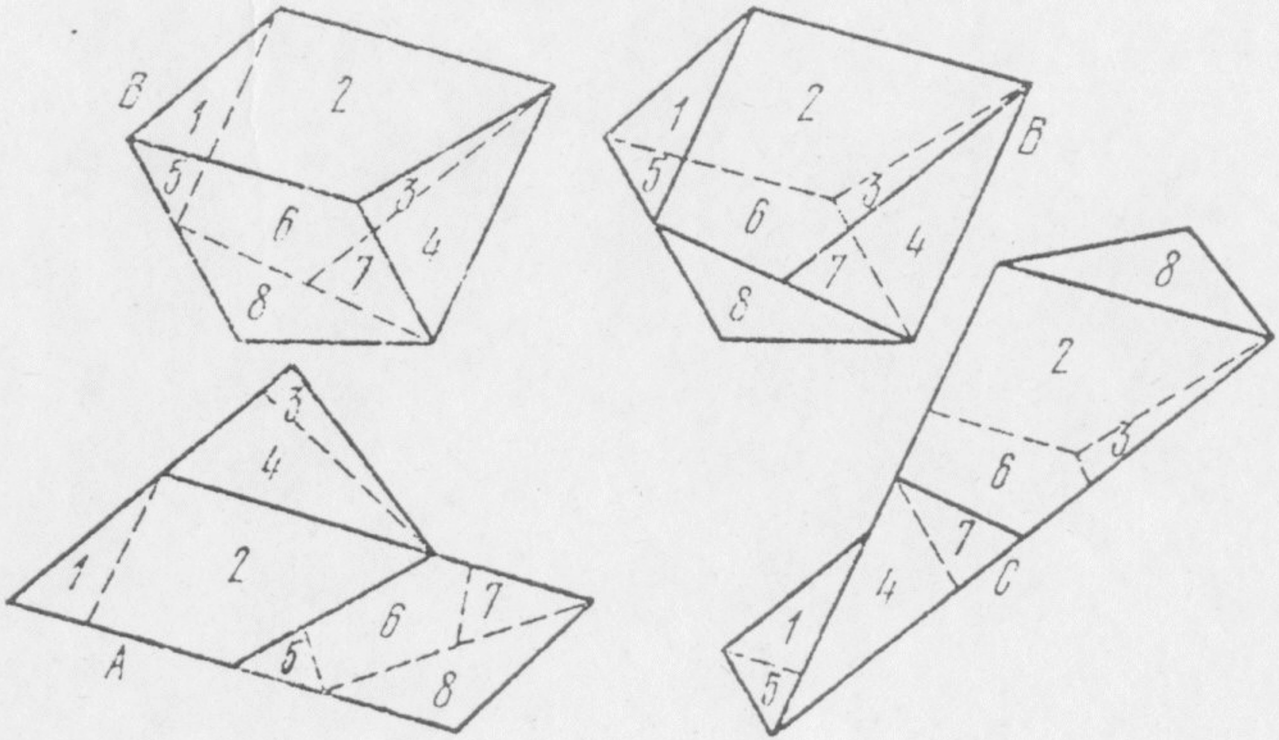


FIG. 20



a b

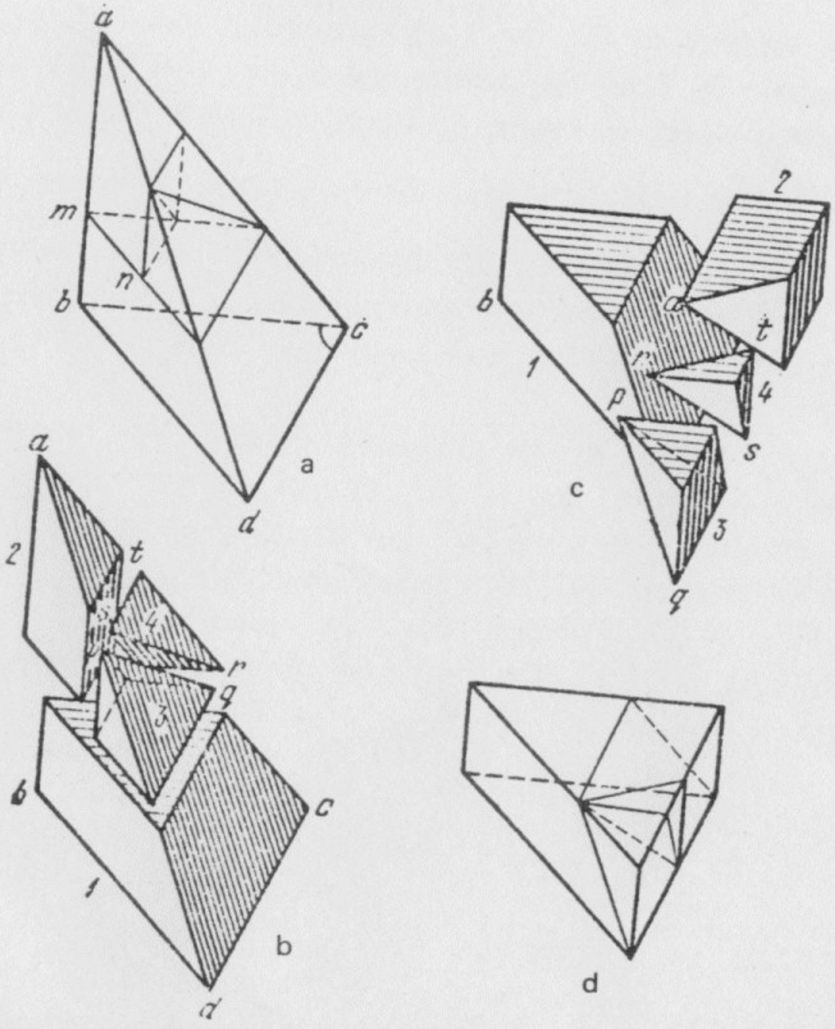
FIG. 27

演習問題による証明
Solution by a series of exercises

- 面積1で、底辺の長さが有理数である三角形は単位正方形と分割同値であることを示せ
- 任意の面積1の長方形が単位正方形と分割同値であることを示せ
- 上の事実を用いて、任意の2つの面積が等しい多角形が分割同値であることを示せ

分割同値性の意味

- 二次元の幾何では、『面積』が図形を分類する。辺の長さが無理数でも、あるいは超越数でもかまわない
- 二次元の幾何では、分割、移動、全体図のスケールで全ての図形が移りあい、「形」を自由に変えられる
- 図形の面積とは何か？　それは、その図形と分割同値な正方形の大きさである。
- Gauss：　Different in 3D space
  – 三角錐の体積の公式をどうやって小学生に教えるか？
  (How to teach the volume formula of tetrahedra?)


a
b
c
d
m
n
p
q
r
s
t
1
2
3
4

Hilbertの第三問題

- Hilbertの23の問題(1900)
  - 現代数学をリードした数学プランの策定
    （計算理論でこんなことができるだろうか？）
  - 連続体仮説、リーマン予想などなど
- 第3問題： 底面と高さが同じである三角錐の体積が等しいことを分割同値で証明できるか？
  - 1900年の内に解決した、もっとも「易しかった」問題
- 拡張した言い換え： 2つの体積の同じ多面体はかならず分割同値か？
- Dehn(22歳）による解決：
  - 体積1の正4面体は単位立方体(あるいは3つの直交軸を持つ体積1の三角錐）と分割同値でない
  - 実はこの問題は数論の問題である。

Dehnのアイデア１

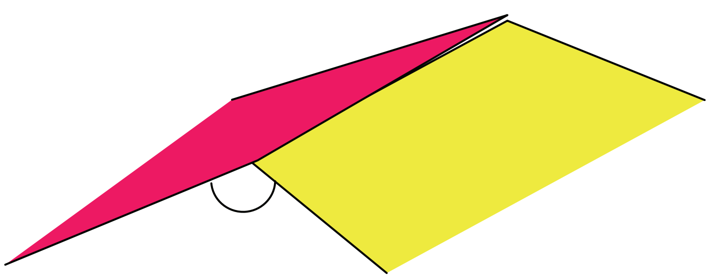
多面体Pの辺e について、2つの量を考える。

１:　e の長さ $l(e)$

2:　e で隣接する2つの面の間の角度　$\theta(e)$

角度は2πを法として考える。

３:　対（$l(e)$, $\theta(e) \bmod 2\pi$）を上手に使おう

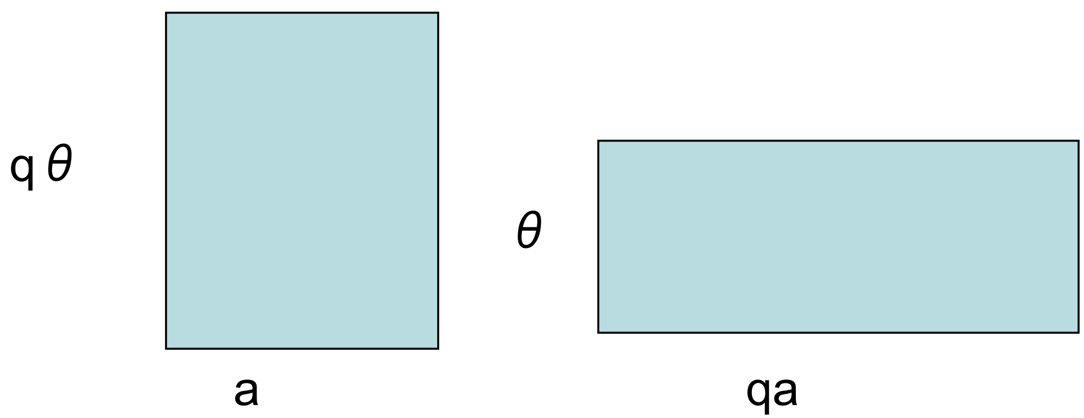


Dehnのアイデア２

前記の対において、有理数qに対しては（a,q θ) と (qa, θ ）とが同じと思おう。

2次元のイメージ図：　面積不変、分割も簡単

3次元の場合でも、辺の長さがc倍で角度1/cだと、辺の周りでの体積は不変に思える（これは動機なので、当面証明不要）



有理数体Q上のテンソル積： ほとんど掛け算と同じだが、少しだけ制限がある

$$a \otimes q\theta = qa \otimes \theta \ if \ q \in \mathrm{Q}$$

$$a \otimes \theta + a \otimes \tau = a \otimes (\theta + \tau)$$

$$a \otimes \theta + b \otimes \theta = (a+b) \otimes \theta$$

$$0 \otimes \theta = a \otimes 0 = 0$$

注意： 物理や量子計算などでの通常のテンソル積では、項 はベクトルで、Qの代わりに実数や複素数を用いる

例：

$$\sqrt{2} \otimes (\pi / 3) = (\sqrt{2} / 6) \otimes 2\pi = (\sqrt{2} / 6) \otimes 0 = 0$$

$$1 \otimes \sqrt{2}\pi = 3 \otimes (\sqrt{2}\pi / 3) \neq 0$$

$$a \otimes \theta + a \otimes (\pi - \theta) = a \otimes \pi = 0$$

Dehn不変量

$$f(P) = \sum_{e:edges} l(e) \otimes \theta(e)$$

補題： Pを2つの多面体P1とP2に分割すると、

f(P)= f（P1)+f(P2)

理由は白板で。

定理： PとP’が分割同値なら、f（P)=f(P‘)

つまり、Dehn不変量が異なる多面体は互いに分割同値でない

Dehn不変量の異なる等積図形

- 立方体のDehn不変量は0
  - θ(e) = π/2なので、テンソル積は常にゼロ
- 辺の長さが1である正四面体のDehn不変量は

$$f(P) = \sum_{e:edges} l(e) \otimes \pi(e) = 6 \otimes \pi(e)$$

$$= 6 \otimes \arccos(1/3)$$

cos(qπ)=1/3 になる有理数qはない(簡単な数論）

Dehnの定理の意義

- 面積と体積は本質的に違う
- 三角錐の体積を求めるには本質的に解析的考察(微積分または連続変形）が必要
- 二次元の場合は、面積が(分割同値における）唯一の不変量
- 三次元だと体積だけだと不十分

さらに進んだ問題

- 体積とDehn不変量が同一なとき、分割同値かどうか判定する手段はあるか？
- この手の問題は難しい：グラフの同型判定など
- 65年後、Sydlerにより、群論を用いて解決
  - Dehn不変量が同一な等積多面体は分割同値である

- アルゴリズムは？
  - Dehn不変量の計算と比較
  - 同一のDehn不変量を持つ場合の分割法の提出
  - 多分、未解決でかなり難しいと思われる
  - 二次元の場合の最小分割： NPか？ NP困難か？

更に更に進むと

- 不変量と変換
  - 図形の同相変換
    - 不変量: ホモロジー、 ホモトピー
    - 球面と同一のホモロジーをもつ、球面と同相でない曲面がある(エキゾチック球面)
    - 球面と同一のホモトピーを持つ局面は球面と同相である: ポアンカレ予想(1904)、Perelman(2003)が証明したらしい
    - Thurston program
  - グラフの同型
    - 不変量: 頂点次数列、近傍次数など
    - 決定的な不変量が見つかっていない

幾何とは何か

- 図形の分類
- 分類した図形の性質の究明
  - 形と面積による分類
    - 合同、相似
    - 変形を許した分類:　線形変換、一般変換
- 中心理念:分類した族には、美しい(対称性の高い）代表が居る
  - 正方形、円、正多角形
- 中心理念の破れ
  - 正7面体はなぜ存在しないか？
- F.Klein の「Erlangen目録」
  「美しさ（対称性）は群論で測る」

現代の幾何

- 不変量を用いた分類 （Dehn不変量は一例）
- 不変量を用いた分類と図形の『形』の対応
- 群論を用いた『美しい』代表図形（対称空間）

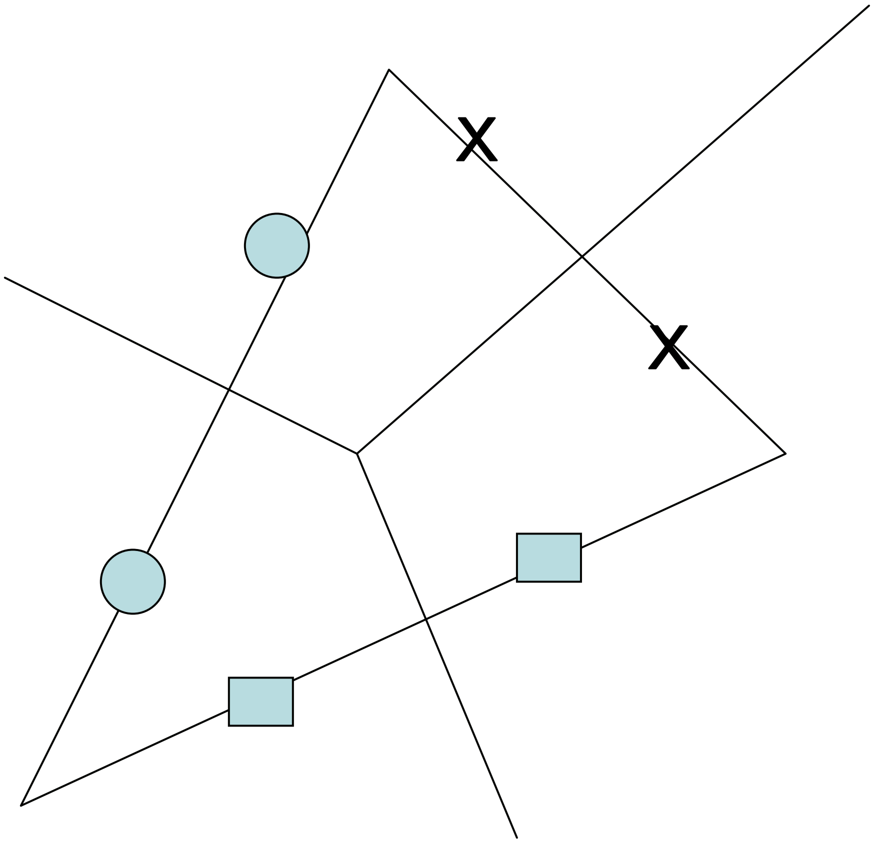
計算幾何学

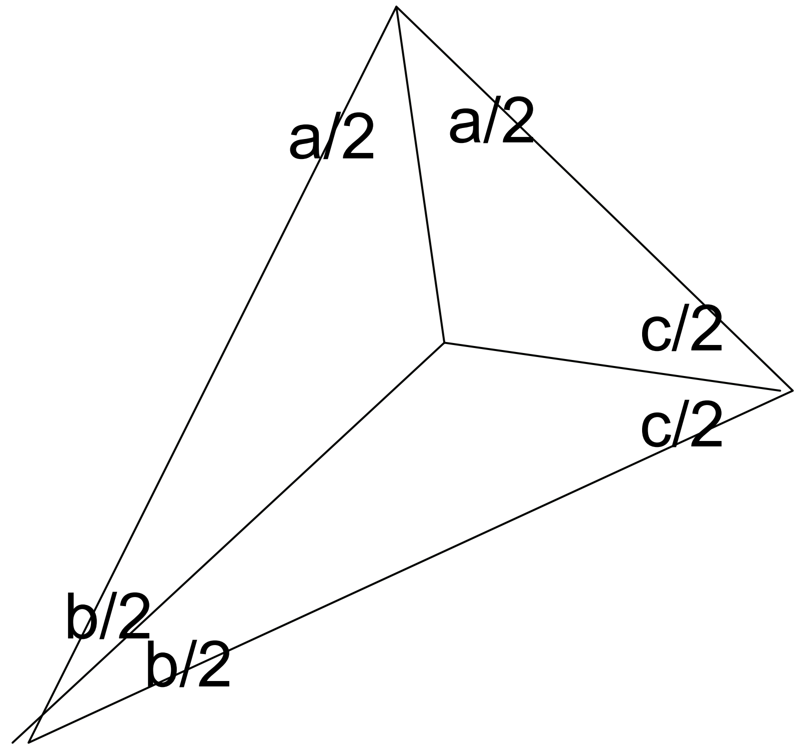
- 組合せ構造を用いた分類 (非常に豊富で多彩）
- 分類を行うアルゴリズムの設計と解析
- 幾何の中心理念とは少し離れた見地

おまけ:時間があったら遊びましょう

- 　幾何の定理があったら拡張してみましょう
- 　拡張することによって数学は広がる
- 　計算幾何学に繋がるものがあるかどうか考えて見ましょう

簡単な定理を見直そう（外心と内心）





課題:　　これらの概念を一般化、もしくは変形してください。

一般化の方向

- 二次元　→　高次元
  - 数学の定理
  - 内心、外心に関連した定理、例えば正弦定理はどのようになるだろう？（徳山は良く知らない）
- 3角形、あるいは3点　→n角形、n点
  - 計算幾何学へ
  - アイデア次第でいろいろな一般化があるはず
- 二等分⇒3等分、n等分

あとは白板でやりましょう