列挙の基礎と基本的なアルゴリズム：演習問題

岡本 吉央

凡例： $(*)$ 推奨； $(-)$ 易； $(+)$ 難
注意 1： 設計したアルゴリズムの正当性，効率性を証明する必要がある．
注意 2： 演習問題の中には，出題者も完全な解答を分かっていないものがある．

演習問題 1 講義中に与えた分割探索による部分集合列挙アルゴリズムが差分出力をするように変更を加えると，その変更後のアルゴリズムの時間計算量がならし定数時間となることを証明せよ．

演習問題 2 講義中の命題 2 (部分集合列挙 Gray 符号における次の出力を定める規則) を証明せよ．

演習問題 3 講義中の命題 4 (根付き木の偶奇探索において，1 つの出力から次の出力までに辿る辺の数が定数であること) を証明せよ．

演習問題 4 $(*-)$ 自然数 n を (1 進表現で) 入力として，$\{1,\dots,n\}$ の部分集合の中で要素数が偶数のものをすべて出力するならし多項式時間遅延アルゴリズムを設計せよ．可能ならば，ならし線形時間遅延アルゴリズム，最悪時線形時間遅延アルゴリズムを設計してみよ．

演習問題 5 自然数 n と自然数 q を (1 進表現で) 入力として，$\{1,\dots,n\}$ の部分集合の中で要素数が q の倍数であるものをすべて出力するならし多項式時間遅延アルゴリズムを設計せよ．可能ならば，ならし線形時間遅延アルゴリズム，最悪時線形時間遅延アルゴリズムを設計してみよ．

演習問題 6 $(*)$ 自然数 n (1 進表現) と自然数 N (2 進表現) を入力として，$\{1,\dots,n\}$ の部分集合の中で要素和が N になるものをすべて出力するならし多項式時間遅延アルゴリズムを設計せよ．可能ならば，ならし線形時間遅延アルゴリズム，最悪時線形時間遅延アルゴリズムを設計してみよ．補足：例えば $\{3,7,8\}$ の要素和は $3+7+8=18$ である．

演習問題 7 自然数 n を (1 進表現で) 入力として，$\{1,\dots,n\}$ の部分集合すべてを辞書式順序の小さい方から順番に出力するならし多項式時間遅延アルゴリズムを設計せよ．ただし，2 つの集合 $X, Y \subseteq \{1,\dots,n\}$ に対して X が辞書式順序で Y よりも小さいことを「$\min X \setminus Y < \min Y \setminus X$」であることと定義する．ここで，便宜上 $\min \emptyset = -\infty$ とする．可能ならば，ならし線形時間遅延アルゴリズム，最悪時線形時間遅延アルゴリズムを設計してみよ．

演習問題 8 $(*)$ 集合 $\{1,\dots,n\}$ の順列 $(a_1,\dots,a_n)$ が**撹乱順列** (derangement) であるとは，任意の $i \in \{1,\dots,n\}$ に対して $a_i \neq i$ を満たすことである．自然数 n が (1 進表現で) 与えられたとき，$\{1,\dots,n\}$ 上の撹乱順列をすべて出力するならし多項式時間遅延アルゴリズムを設計せよ．可能ならば，ならし線形時間遅延アルゴリズム，最悪時線形時間遅延アルゴリズムを設計してみよ．

演習問題 9 集合 $\{1,\dots,n\}$ の順列 $(a_1,\dots,a_n)$ が**交代順列** (alternating permutation) であるとは，$a_1 > a_2 < a_3 > a_4 < \cdots$ を満たすことである．自然数 n が (1 進表現で) 与えられたとき，$\{1,\dots,n\}$ 上の交代順列をすべて出力するならし多項式時間遅延アルゴリズムを設計せよ．可能ならば，ならし線形時間遅延アルゴリズム，最悪時線形時間遅延アルゴリズムを設計してみよ．

演習問題 10 $(*)$ 自然数 $r_1,\dots,r_m$ と $c_1,\dots,c_n$ に対して $(r_1,\dots,r_m)$ を行和，$(c_1,\dots,c_n)$ を列和として持つ **2 元分割表** (2-way contingency table) とは，各成分が自然数 (すなわち非負整数) である $n \times m$ 行列 $A = (a_{ij})$ で，任意の $i \in \{1,\dots,m\}$ に対して $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = r_i$ であり，任意の $j \in \{1,\dots,n\}$ に対して $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} = c_j$ であるようなもののことである．自然数 $r_1,\dots,r_m$ と $c_1,\dots,c_n$ が (2 進表現で) 与えられたとき，$(r_1,\dots,r_m)$ を行和，$(c_1,\dots,c_n)$ を列和として持つ分割表をすべて出力するならし多項式時間遅延アルゴリズムを設計せよ．可能ならば，ならし線形時間遅延アルゴリズム，最悪時線形時間遅延アルゴリズム

リズムを設計してみよ．(ヒント：取りあえず，分割表を 1 つ見つけるためにはどうしたらよいか考えてみる．簡単な構成法が分かれば，それを根とする列挙木を設計して，逆探索法の適用を試してみる．)

演習問題 11 有限集合 $X \subseteq \{1, \ldots, n\}$ が与えられたとき，X の部分集合で要素和が偶数のものをすべて出力するならし多項式時間遅延アルゴリズムを設計せよ．可能ならば，ならし線形時間遅延アルゴリズム，最悪時線形時間遅延アルゴリズムを設計してみよ．

演習問題 12 集合 $\{1, \ldots, n\}$ の順列 $\pi = (a_1, \ldots, a_n)$ における**増加部分列**とは π の部分列 $(a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_k})$ で $a_{i_1} < a_{i_2} < \cdots < a_{i_k}$ を満たすもののことである．集合 $\{1, \ldots, n\}$ の順列 $\pi = (a_1, \ldots, a_n)$ が与えられたとき，π における増加部分列をすべて出力するならし多項式時間遅延アルゴリズムを設計せよ．可能ならば，ならし線形時間遅延アルゴリズム，最悪時線形時間遅延アルゴリズムを設計してみよ．補足：定義より，空列や要素数 1 の部分列も増加部分列である．

演習問題 13 (グラフ理論やグラフ・アルゴリズムに対する慣れが必要かもしれない．)
無向グラフ $G = (V, E)$ の**クリーク** (clique) とは G の頂点部分集合 $S \subseteq V$ で，S の中の任意の 2 頂点が G の辺で結ばれているもののことである．与えられた無向グラフのクリークをすべて出力するならし多項式時間遅延アルゴリズムを設計せよ．可能ならば，ならし線形時間遅延アルゴリズム，最悪時線形時間遅延アルゴリズムを設計してみよ．補足：空集合や要素数 1 の頂点部分集合もクリークであるので注意する．

演習問題 14 (+) (グラフ理論やグラフ・アルゴリズムに対する慣れが必要かもしれない．)
無向グラフ $G = (V, E)$ の**全張木** (spanning tree) とは G の部分グラフで閉路を含まないという性質に関して極大なもののことである．与えられた無向グラフの全張木をすべて出力するならし多項式時間遅延アルゴリズムを設計せよ．可能ならば，ならし線形時間遅延アルゴリズム，最悪時線形時間遅延アルゴリズムを設計してみよ．

演習問題 15 (+) (離散幾何や計算幾何に対する慣れが必要かもしれない．)
2 次元平面上に与えられた有限点集合 $P \subseteq \mathbb{R}^2$ の部分集合 $S \subseteq P$ が**線形分離可能** (linearly separable) であるとは，ある直線 $\ell \subseteq \mathbb{R}^2$ が存在して，その直線の片側に S の点が全て位置し，もう片側に $P \setminus S$ の点が全て位置することを意味する．与えられた有限点集合 P において，どの 3 点も 1 直線上に存在しないとき，線形分離可能な P の部分集合をすべて出力するならし多項式時間遅延アルゴリズムを設計せよ．可能ならば，ならし線形時間遅延アルゴリズム，最悪時線形時間遅延アルゴリズムを設計してみよ．

演習問題 16 (+) (離散幾何や計算幾何に対する慣れが必要かもしれない．)
2 次元平面上に与えられた有限点集合 $P \subseteq \mathbb{R}^2$ の部分集合 $S \subseteq P$ が**凸の位置** (convex position) にあるとは，S を頂点集合とする凸多角形が存在することである．与えられた有限点集合 P において，どの 3 点も 1 直線上に存在しないとき，凸の位置にある P の部分集合をすべて出力するならし多項式時間遅延アルゴリズムを設計せよ．可能ならば，ならし線形時間遅延アルゴリズム，最悪時線形時間遅延アルゴリズムを設計してみよ．補足：定義より，空集合や 1 点から成る集合も凸の位置にある．